ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **102**
Β' Λυκείου
Ον/μο:………………………. **Γεν. Παιδείας**
Ύλη: Συστήματα, Ιδιότητες Συναρτήσεων, Τριγωνομετρία, **14-02-16**
Πολυώνυμα – Πολυωνυμικές εξισώσεις

Θέμα 1^o:

Α. Πότε μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α λέγεται περιοδική; **(6 μον.)**

Β. Τι ονομάζουμε πολυώνυμο του x; **(6 μον.)**

Γ. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x-ρ είναι ίσο με P(ρ). **(8 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Αν D=0 και $|D_x|+|D_y|>0$ τότε το σύστημα είναι αδύνατο. **Σ Λ**

ii. Αν μία συνάρτηση f δεν είναι γνησίως φθίνουσα σ’ ένα διάστημα Δ, τότε θα είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. **Σ Λ**

iii. $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2}-x\right)=\eta\mu x$. **Σ Λ**

iv. Το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου $P(x)=\left(3x^2-2\right)^{2016}$ είναι 1. **Σ Λ**

v. Οι εξισώσεις $\sqrt{x+7}=x+1$ και $x+7=x^2+2x+1$ είναι ισοδύναμες. **Σ Λ**

(5x1=5 μον.)

Θέμα 2^o:

Α. Δίνεται το σύστημα: $\left.\begin{array}{l}\mu x+y=1\\ x+\mu y=1\end{array}\right\}(\Sigma_1)$.

i. Να βρεθεί η τιμή του $\mu\in\mathbb{R}$, ώστε το σύστημα να είναι αδύνατο. **(6 μον.)**

ii. Αν μ=-1 τότε:

α. Να αποδειχθεί ότι το σύστημα $\left.\begin{array}{l}\lambda x+(\lambda+2\mu+4)y=4\mu+8\\ (\lambda-\mu-3)x+\lambda y=1-\mu\end{array}\right\}(\Sigma_2)$

έχει μοναδική λύση και να την βρείτε. **(5 μον.)**

β. Να βρεθούν οι τιμές του λ, ώστε να ισχύει $\left|x_0 - y_0\right| = 4$, όπου (x_0, y_0) η λύση του (Σ_2). **(4 μον.)**

Β. Αν διαιρέσουμε έναν διψήφιο αριθμό με το άθροισμα των ψηφίων του, βρίσκουμε πηλίκο 6 και υπόλοιπο 3. Αν αλλάξουμε τα ψηφία του και τον αριθμό τον διαιρέσουμε με το άθροισμα των ψηφίων του, βρίσκουμε πηλίκο 4 και υπόλοιπο 9. Ποιος είναι ο αρχικός διψήφιος αριθμός; **(10 μον.)**

<u>Θέμα 3^o:</u>

Α. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{2\varepsilon\varphi x + \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 1},\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \varepsilon\varphi x,\ 0<x<\dfrac{\pi}{2}$. **(5 μον.)**

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $f^3(x) - 2f^2(x) + 3f(x) - 2 = 0$. **(5 μον.)**

iii. Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{\pi}{180}\right)\cdot f\left(\frac{2\pi}{180}\right)\cdot f\left(\frac{3\pi}{180}\right)\cdot\ldots\cdot f\left(\frac{89\pi}{180}\right) = 1.$$ **(3 μον.)**

Β. i. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις Α και Β, όπου:

$$A = \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\cdot\varepsilon\varphi(\pi + \theta)\cdot\sigma\varphi(\pi - \theta)\cdot\eta\mu\frac{7\pi}{2}}{(\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta)\cdot(\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta) + 2\sigma\upsilon\nu^2\theta}$$

$$B = \frac{\sigma\upsilon\nu(3\pi - 2\theta) + \sigma\upsilon\nu(2\theta - 2\pi) + \sigma\upsilon\nu 3\theta}{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\cdot\varepsilon\varphi(\pi + \theta)}$$ **(2x3=6 μον.)**

ii. Αν Α=ημθ και Β=συν3θ να λυθεί η εξίσωση Α=Β. **(6 μον.)**

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Θέμα 4ο:

Α. Έστω το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x-6,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Αν το πολυώνυμο έχει ρίζα το 2 και επιπλέον η αριθμητική του τιμή για x=-1 είναι -24, να αποδείξετε ότι α=-6 και β=11. **(6 μον.)**

Β. Έστω το πολυώνυμο $Q(x)=2x^3+\alpha x^2+20x+\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Αν το Q(x) έχει παράγοντα το $(x-2)^2$, να αποδείξετε ότι α=-11 και β=-12. **(6 μον.)**

Γ. Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση του πολυωνύμου P(x) να είναι πάνω από τη γραφική παράσταση του πολυωνύμου Q(x). **(8 μον.)**

Δ. Να λύσετε την ανίσωση: $\sqrt{2x+5}\ge x+1$. **(5 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1^{ο}:

Α. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέγεται περιοδική, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός Τ>0 τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:

α. $x+T \in A$, $x-T \in A$ και

β. $f(x+T)=f(x-T)=f(x)$

Ο πραγματικός αριθμός Τ λέγεται περίοδος της συνάρτησης f.

Β. Ονομάζουμε πολυώνυμο του x κάθε παράσταση της μορφής:

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$$

όπου ν είναι ένας φυσικός αριθμός και $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_\nu$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

Γ. Η ταυτότητα της διαίρεσης του P(x) με το x-ρ γράφεται :

$$P(x)=(x-\rho)\cdot\pi(x)+\upsilon(x) \ .$$

Επειδή ο διαιρέτης x-ρ είναι πρώτου βαθμού , το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι σταθερό πολυώνυμο υ. Έτσι έχουμε :

$P(x)=(x-\rho)\cdot\pi(x)+\upsilon$ και αν θέσουμε x=ρ , παίρνουμε

$$P(\rho)=(\rho-\rho)\cdot\pi(\rho)+\upsilon=0+\upsilon=\upsilon.$$

Επομένως $\upsilon = P(\rho)$.

Δ. **i.**Σ **ii.**Λ **iii.** Σ **iv.**Σ **v.**Λ

Θέμα 2^{ο}:

Α. i. Βρίσκουμε την ορίζουσα του (Σ_1). Είναι:

$$D=\begin{vmatrix}\mu & 1\\ 1 & \mu\end{vmatrix}=\mu^2-1=(\mu-1)(\mu+1)$$

Για να είναι αδύνατο το σύστημα, πρέπει κατ’ αρχάς

$D=0 \Leftrightarrow (\mu-1)(\mu+1)=0 \Leftrightarrow \mu=\pm1.$

→Για μ=1 το Σ_1 γίνεται: $\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ x+y=1 \end{array}\right\}$, δηλαδή έχει άπειρες λύσεις.

→Για μ=-1 το Σ_1 γίνεται: $\left.\begin{array}{l} -x+y=1 \\ x-y=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=-1 \\ x-y=1 \end{array}\right\}$,

δηλαδή είναι αδύνατο. Επομένως είναι **μ=-1**.

ii.α. Για μ=-1 το (Σ_2) γίνεται: $\left.\begin{array}{l}\lambda x+(\lambda+2)y=4\\(\lambda-2)x+\lambda y=2\end{array}\right\}$

Βρίσκουμε τις ορίζουσες του (Σ_2). Είναι:

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & \lambda+2\\ \lambda-2 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-(\lambda+2)(\lambda-2)=\lambda^2-\lambda^2+4=4\neq 0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}4 & \lambda+2\\ 2 & \lambda\end{vmatrix}=4\lambda-2(\lambda+2)=4\lambda-2\lambda-4=2\lambda-4=2(\lambda-2)$$

$$D_y=\begin{vmatrix}\lambda & 4\\ \lambda-2 & 2\end{vmatrix}=2\lambda-4(\lambda-2)=2\lambda-4\lambda+8=-2\lambda+8=-2(\lambda-4)$$

Εφόσον είναι $D\neq 0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση την:

$$(x_0,y_0)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{2(\lambda-2)}{4},\frac{-2(\lambda-4)}{4}\right)=\left(\frac{\lambda-2}{2},-\frac{\lambda-4}{2}\right).$$

β. Είναι: $|x_0-y_0|=4\Leftrightarrow\left|\frac{\lambda-2}{2}+\frac{\lambda-4}{2}\right|=4\Leftrightarrow\left|\frac{2\lambda-6}{2}\right|=4\Leftrightarrow$

$$|2\lambda-6|=8\Leftrightarrow 2\lambda-6=8 \text{ ή } 2\lambda-6=-8$$

Άρα **λ=7** ή **λ=-1** .

Β. Έστω x, y τα ψηφία του αριθμού. Τότε έχουμε:

$$\begin{array}{r|l}10x+y & \underline{x+y}\\ 3 & 6\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r|l}10y+x & \underline{x+y}\\ 9 & 4\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}10x+y=6(x+y)+3\\10y+x=4(x+y)+9\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}10x+y=6x+6y+3\\10y+x=4x+4y+9\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}4x-5y=3\\-3x+6y=9\end{array}\right\}\underset{:3}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l}4x-5y=3\\-x+2y=3\end{array}\right\}\underset{\cdot 4}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l}4x-5y=3\\-4x+8y=12\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}$$

$$\left.\begin{array}{l}3y=15\\4x-5y=3\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}y=5\\x=7\end{array}\right\}$$

Επομένως, ο αρχικός διψήφιος αριθμός είναι το 75.

Θέμα 3ο:

Α. i. Είναι: $f(x)=\sqrt{2\varepsilon\varphi x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}-1=\sqrt{2\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi^2 x+1}-1=$

$$\sqrt{(\varepsilon\varphi x+1)^2}-1=|\varepsilon\varphi x+1|-1\overset{0<x<\pi/2}{=}\varepsilon\varphi x+1-1=\varepsilon\varphi x.$$

ii. $f^3(x)-2f^2(x)+3f(x)-2=0\Leftrightarrow \varepsilon\varphi^3 x-2\varepsilon\varphi^2 x+3\varepsilon\varphi x-1=0\,(1)$

Θέτουμε εφx=ω και έχουμε: $\omega^3-2\omega^2+3\omega-2=0\,(2)$

Πιθανές ακέραιες ρίζες σύμφωνα με το θεώρημα των ακέραιων ριζών είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή $\pm1,\pm2$.

Από σχήμα Horner για ρ=1 έχουμε:

1 ↓	-2 1	3 -1	-2 2	1
1	-1	2	0	

Η (2): $(\omega-1)(\omega^2-\omega+2)=0\Leftrightarrow$

$\omega-1=0\Leftrightarrow\omega=1$

ή

$\omega^2-\omega+2=0,$ αδύνατη εφόσον $\Delta<0$

Τότε από την (1) έχουμε ότι:

$\varepsilon\varphi x=1\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}.$ Όμως,

$$0<x<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 0<\kappa\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{4}<\kappa<\frac{1}{4}\overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Rightarrow}\kappa=0.$$

Για κ=0 είναι: $x=\frac{\pi}{4}$.

iii. $f\left(\frac{\pi}{180}\right)\cdot f\left(\frac{2\pi}{180}\right)\cdot f\left(\frac{3\pi}{180}\right)\cdot\ldots\cdot f\left(\frac{89\pi}{180}\right)=1\Leftrightarrow$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{180}\right)\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{2\pi}{180}\right)\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{180}\right)\cdot\ldots\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{89\pi}{180}\right)=1$$

Παρατηρούμε ότι: τα τόξα 89π/180 και π/180 είναι συμπληρωματικά. Ομοίως τα τόξα 2π/180 και 88π/180 είναι συμπληρωματικά. κ.ο.κ.

Οπότε: $\varepsilon\varphi\left(\frac{89\pi}{180}\right)=\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{180}\right),\ \varepsilon\varphi\left(\frac{88\pi}{180}\right)=\sigma\varphi\left(\frac{2\pi}{180}\right)$ κ.ο.κ.

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Επομένως:

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{180}\right)\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{2\pi}{180}\right)\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{180}\right)\cdot\ldots\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{89\pi}{180}\right)=1\Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{180}\right)\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{2\pi}{180}\right)\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{180}\right)\cdot\ldots\cdot\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{180}\right)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{2\pi}{180}\right)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{180}\right)=1\Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{180}\right)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{180}\right)\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{2\pi}{180}\right)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{2\pi}{180}\right)\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{180}\right)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{180}\right)\cdot\ldots=1\Leftrightarrow$$

$$1\cdot1\cdot1\cdot\ldots\cdot1=1\Leftrightarrow$$

$1=1$ που ισχύει.

Β. i.

$$A=\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cdot\varepsilon\varphi(\pi+\theta)\cdot\sigma\varphi(\pi-\theta)\cdot\eta\mu\frac{7\pi}{2}}{(\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta)+2\sigma\upsilon\nu^2\theta}$$

$$A=\frac{\eta\mu\theta\cdot\varepsilon\varphi\theta\cdot(-\sigma\varphi\theta)\cdot(-1)}{\eta\mu^2\theta-\sigma\upsilon\nu^2\theta+2\sigma\upsilon\nu^2\theta}$$

$$A=\frac{\eta\mu\theta}{\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta}$$

$$A=\eta\mu\theta$$

$$B=\frac{\sigma\upsilon\nu(3\pi-2\theta)+\sigma\upsilon\nu(2\theta-2\pi)+\sigma\upsilon\nu3\theta}{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cdot\varepsilon\varphi(\pi+\theta)}$$

$$B=\frac{-\sigma\upsilon\nu2\theta+\sigma\upsilon\nu\left[-(2\pi-2\theta)+\sigma\upsilon\nu3\theta\right]}{\sigma\varphi\theta\cdot\varepsilon\varphi\theta}$$

$$B=-\sigma\upsilon\nu2\theta+\sigma\upsilon\nu(2\pi-2\theta)+\sigma\upsilon\nu3\theta$$

$$B=-\sigma\upsilon\nu2\theta+\sigma\upsilon\nu2\theta+\sigma\upsilon\nu3\theta$$

$$B=\sigma\upsilon\nu3\theta$$

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

ii.

$$A=B \Leftrightarrow \eta\mu\theta=\sigma\upsilon\nu 3\theta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sigma\upsilon\nu 3\theta \Leftrightarrow 3\theta=2\kappa\pi\pm\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\Leftrightarrow$$

$$3\theta=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}-\theta \Leftrightarrow 4\theta=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \theta=\frac{\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{8},\ \kappa\in\mathbb{Z}.$$

ή

$$3\theta=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}+\theta \Leftrightarrow 2\theta=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \theta=\kappa\pi-\frac{\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}.$$

<u>Θέμα 4ο:</u>

Α. Εφόσον το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x-6,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ έχει ρίζα το 2 θα είναι P(2)=0 και επιπλέον η αριθμητική του τιμή για x=-1 είναι -24, δηλαδή P(-1)=-24. Οπότε:

$$\left.\begin{array}{l}P(2)=0\\P(-1)=-24\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}8+4\alpha+2\beta-6=0\\-1+\alpha-\beta-6=-24\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}4\alpha+2\beta=-2\\\alpha-\beta=-17\end{array}\right\}\overset{:2}{\Leftrightarrow}$$

$$\left.\begin{array}{l}2\alpha+\beta=-1\\\alpha-\beta=-17\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l}3\alpha=-18\\\alpha-\beta=-17\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha=-6\\\beta=11\end{array}\right\}$$

Β. Εφόσον το πολυώνυμο $Q(x)=2x^3+\alpha x^2+20x+\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ έχει παράγοντα το $(x-2)^2$ το υπόλοιπο της διαίρεσης του Q(x) με το x-2 θα είναι 0 και επίσης το υπόλοιπο του πηλίκου με το x-2 θα είναι και πάλι 0. Οπότε, από σχήμα Horner στο Q(x) για ρ=2 έχουμε:

2 ↓	α 4	20 2α+8	β 4α+56	2
2	α+4	2α+28	4α+β+56	

Άρα πρέπει 4α+β+56=0 **(1)**. Από σχήμα Horner στο $\pi(x)=2x^2+(\alpha+4)x+2\alpha+28$ για ρ=2 έχουμε:

2 ↓	α+4 4	2α+28 2α+16	2
2	α+8	4α+44	

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Οπότε πρέπει: $4\alpha+44=0 \Leftrightarrow 4\alpha=-44 \Leftrightarrow \alpha=-11$. Τότε η (1):
$4\alpha+\beta+56=0 \Leftrightarrow \beta=-56+44 \Leftrightarrow \beta=-12$.

Γ. Από το Α έχουμε ότι: $P(x)=x^3-6x^2+11x-6$ και από το Β έχουμε: $Q(x)=2x^3-11x^2+20x-12$. Για να είναι η γραφική παράσταση του P(x) πάνω από τη γραφική παράσταση του Q(x) πρέπει:
$P(x)>Q(x) \Leftrightarrow x^3-6x^2+11x-6>2x^3-11x^2+20x-12 \Leftrightarrow$
$x^3-5x^2+9x-6<0$ (1)

Από σχήμα Horner για ρ=2 έχουμε:

1	-5	9	-6	2
↓	2	-6	6	
1	-3	3	0	

Η (1) γίνεται: $(x-2)(x^2-3x+3)<0$ (2)

$\rightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

$\rightarrow x^2-3x+3=0$, αδύνατη εφόσον Δ=-3<0

Ο πίνακας προσήμων είναι:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Γ		-	0	+	

Οπότε από τη (2) έχουμε $x\in(-\infty,2)$.

Δ. Έχουμε την ανίσωση: $\sqrt{2x+5}\geq x+1$ (1)

Κατ' αρχάς πρέπει $2x+5\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\frac{5}{2}$.

$\rightarrow$ Αν $x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$ η (1) ισχύει. Οπότε $-\frac{5}{2}\leq x<-1$.

$\rightarrow$ Αν $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ η (1): $\sqrt{3}\geq 0$ που ισχύει. Άρα, $x\geq -\frac{5}{2}$.

$\rightarrow$ Αν $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$ τότε υψώνοντας κατά μέλη στο τετράγωνο την (1) έχουμε:

$2x+5\geq x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2-4\leq 0 \overset{\text{ετερ.}}{\Leftrightarrow} -2\leq x\leq 2$.

Τελικά σε κάθε περίπτωση έχουμε: $-2\leq x<-1$.

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ