ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **101**

Β' Λυκείου

Ον/μο:……………………… **Γεν. Παιδείας**

Ύλη: Συστήματα –Ιδιότητες Συναρτήσεων **01-11-15**

Θέμα 1ο:

Α. Ποιες είναι οι μέθοδοι επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους; **(5 μον.)**

Β. Πότε μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α λέγεται περιττή; **(6 μον.)**

Γ. Πότε μία συνάρτηση λέγεται γνησίως φθίνουσα σ’ ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; **(4 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σ**ωστό ή **(Λ) Λ**άθος τις παρακάτω προτάσεις :

i. Η συνάρτηση $f:[-2,7]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=3x^2+2$ είναι άρτια. **Σ Λ**

ii. Σ’ ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους αν $D_x\neq 0$, τότε το (Σ) έχει μοναδική λύση. **Σ Λ**

iii. Μία γνησίως μονότονη συνάρτηση που διέρχεται από τα σημεία $A(-1,-5)$ και $B(3,7)$ είναι γνησίως αύξουσα . **Σ Λ**

iv. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0, τότε η -f παρουσιάζει μέγιστο στο x_0. **Σ Λ**

v. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x)=f(x+3)-2$ είναι μετατόπισης της γραφικής παράστασης της f κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και κατά 2 μονάδες προς τα κάτω. **Σ Λ**

(5x2=10 μον.)

Θέμα 2ο: Δίνεται το σύστημα: $\left.\begin{aligned}\lambda^2x+y&=\lambda-1\\ x+\lambda y&=\lambda-1\end{aligned}\right\}(\Sigma).$

Α. Να βρείτε τις ορίζουσες του (Σ), τις τιμές του λ για τις οποίες το (Σ) έχει μοναδική λύση και στη συνέχεια να βρείτε τη λύση αυτή. **(10 μον.)**

Β. Αν επιπλέον, οι εξισώσεις του (Σ) παριστάνουν τις ευθείες $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$, να βρείτε τις τιμές του λ, για τις οποίες οι $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ είναι παράλληλες. **(5 μον.)**

Γ. Αν οι ευθείες ε_1, ε_2 του ερωτήματος Β τέμνονται πάνω στην ευθεία $\varepsilon: x-5y=2$, να βρείτε το λ. **(4 μον.)**

Δ. Για λ=1, να βρείτε τις λύσεις (x,y) του συστήματος που ικανοποιούν τη σχέση: $x^2+2y=15$. **(6 μον.)**

<u>Θέμα 3ο:</u>

Α. i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{6x}{x^2+1}$ παρουσιάζει μέγιστο για x=1 και ελάχιστο για x=-1. **(5 μον.)**

ii. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της $g(x)=\dfrac{3x^2-6x+3}{x^2+1}$. **(7 μον.)**

Β. Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=3x^4+2x^2+1$.

i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση. **(7 μον.)**

ii. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή. **(6 μον.)**

Θέμα 4ο:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3x^5-\dfrac{2}{x}$.

Α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $\Delta=(0,+\infty)$. **(6 μον.)**

Β. Να συγκρίνετε τις τιμές $f\left(\sqrt{3}\right)$ και $f\left(\sqrt[3]{5}\right)$. **(4 μον.)**

Γ. Να βρείτε την τιμή $f(1)$ και στη συνέχεια, να λύσετε την εξίσωση $f(x)-1=0$ στο $(0,+\infty)$. **(4 μον.)**

Δ. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων. **(6 μον.)**

Ε. Να βρείτε την $\varphi(x)$, της οποίας η γραφική παράσταση είναι μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f, κατά 2 μονάδες αριστερά και κατά 3 μονάδες προς τα πάνω. **(5 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1ο:

Α. Οι μέθοδοι επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος 2x2 είναι : ∗ Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών .
∗ Μέθοδος της αντικατάστασης .
∗ Μέθοδος σύγκρισης .
∗ Μέθοδος των οριζουσών .
∗ Γραφική επίλυση .

Β. Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέγεται περιττή, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει: $-x \in A$ και $f(-x) = -f(x)$.

Γ. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ’ ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$.

Δ. **i.**Λ **ii.**Λ **iii.** Σ **iv.**Σ **v.**Λ

Θέμα 2ο:

Α. Βρίσκουμε τις ορίζουσες του (Σ). Είναι:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda^2 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda\text{-}1 & 1 \\ \lambda\text{-}1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1) - (\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda - 1) = (\lambda - 1)^2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda\text{-}1 \\ 1 & \lambda\text{-}1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 1) - (\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

Για να έχει το (Σ) μοναδική λύση πρέπει:

$$D \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)\underbrace{(\lambda^2 + \lambda + 1)}_{\Delta<0} \neq 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1.$$

Η μοναδική λύση του (Σ) είναι:

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{(\lambda - 1)^2}{(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)}, \frac{(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)}{(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)}\right) =$$

$$=\left(\frac{\lambda-1}{\lambda^2+\lambda+1},\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+\lambda+1}\right).$$

Β. Για να είναι οι ε_1, ε_2 παράλληλες, δηλαδή το (Σ) να είναι αδύνατο πρέπει κατ' αρχάς $D=0 \Leftrightarrow \lambda=1$.

Για λ=1, το (Σ) γίνεται: $\left.\begin{matrix} x+y=0 \\ x+y=0 \end{matrix}\right\}$. Δηλαδή έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x,y)=(x,-x), x\in\mathbb{R}$.

Άρα δεν υπάρχει τιμή του λ ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.

Γ. Για να τέμνονται οι ε_1, ε_2 πρέπει το (Σ) να έχει μοναδική λύση. Θέλουμε να τέμνονται πάνω στην $\varepsilon: x-5y=2$ άρα η λύση (x,y) να επαληθεύει την ε. Είναι:

$$x-5y=2 \Leftrightarrow \frac{\lambda-1}{\lambda^2+\lambda+1}-5\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+\lambda+1}=2 \overset{\lambda^2+\lambda+1\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\lambda-1-5(\lambda^2-1)=2(\lambda^2+\lambda+1) \Leftrightarrow \lambda-1-5\lambda^2+5=2\lambda^2+2\lambda+2 \Leftrightarrow$$

$$7\lambda^2-\lambda-2=0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{57}}{14}.$$

Δ. Για λ=1 το (Σ) έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x,y)=(x,-x), x\in\mathbb{R}$.

Για να ικανοποιούν τη σχέση: $x^2+2y=15$ πρέπει: $x^2+2(-x)=15 \Leftrightarrow$

$$x^2-2x-15=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{2\pm 8}{2}=\left\langle\begin{matrix} 5 \\ -3 \end{matrix}\right..$$

Άρα $(x,y)=(5,-5)$ ή $(x,y)=(-3,3)$.

<u>Θέμα 3^ο^:</u>

Α. i. Έχουμε την $f(x)=\frac{6x}{x^2+1}$ με $A_f=\mathbb{R}$. Για να παρουσιάζει μέγιστο για x=1 πρέπει: $f(x)\le f(1) \Leftrightarrow \frac{6x}{x^2+1}\le 3 \overset{x^2+1>0}{\Leftrightarrow} 6x\le 3x^2+3 \Leftrightarrow$

$3x^2-6x+3\ge 0 \Leftrightarrow 3(x-1)^2\ge 0$ που ισχύει.

Για να παρουσιάζει ελάχιστο για x=-1 πρέπει: $f(x)\ge f(-1) \Leftrightarrow$

$$\frac{6x}{x^2+1}\ge -3 \overset{x^2+1>0}{\Leftrightarrow} 6x\ge -3x^2-3 \Leftrightarrow 3x^2+6x+3\ge 0 \Leftrightarrow 3(x+1)^2\ge 0$$

που ισχύει.

ii. Η $g(x)=\dfrac{3x^2-6x+3}{x^2+1}$ έχει $A_g=\mathbb{R}$. Είναι:

$$g(x)=\frac{3x^2-6x+3}{x^2+1}=\frac{3x^2+3}{x^2+1}-\frac{6x}{x^2+1}=\frac{3(x^2+1)}{x^2+1}-f(x)=3-f(x)$$

Από το (i) ερώτημα έχουμε ότι: $f(x)\le f(1)\Leftrightarrow f(x)\le 3\Leftrightarrow$ $-f(x)\ge -3\Leftrightarrow 3-f(x)\ge 0\Leftrightarrow g(x)\ge 0$, δηλαδή η g παρουσιάζει ελάχιστο το 0 για x=1. Ομοίως έχουμε ότι:

$f(x)\ge f(-1)\Leftrightarrow f(x)\ge -3\Leftrightarrow -f(x)\le 3\Leftrightarrow 3-f(x)\le 6\Leftrightarrow g(x)\le 6$

δηλαδή η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο το 6 για x=-1.

B. Έχουμε την $h(x)=3x^4+2x^2+1$ με $A_h=\mathbb{R}$.

i. Έστω $x_1,x_2\in(-\infty,0]$ με $x_1<x_2$, τότε:

$x_1<x_2\Leftrightarrow {x_1}^4>{x_2}^4\Leftrightarrow 3{x_1}^4>3{x_2}^4$ **(1)**

$x_1<x_2\Leftrightarrow {x_1}^2>{x_2}^2\Leftrightarrow 2{x_1}^2>2{x_2}^2\Leftrightarrow 2{x_1}^2+1>2{x_2}^2+1$ **(2)**

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2) προκύπτει ότι: $h(x_1)>h(x_2)$.

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

Έστω $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$, τότε:

$x_1<x_2\Leftrightarrow {x_1}^4<{x_2}^4\Leftrightarrow 3{x_1}^4<3{x_2}^4$ **(1)**

$x_1<x_2\Leftrightarrow {x_1}^2<{x_2}^2\Leftrightarrow 2{x_1}^2<2{x_2}^2\Leftrightarrow 2{x_1}^2+1<2{x_2}^2+1$ **(2)**

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2) προκύπτει ότι: $h(x_1)<h(x_2)$.

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

ii. Η $h(x)=3x^4+2x^2+1$ έχει $A_h=\mathbb{R}$, άρα $\forall x\in A_h$ το $-x\in A_h$.

Επίσης, $h(-x)=3(-x)^4+2(-x)^2+1=3x^4+2x^2+1=h(x)$.

Επομένως η συνάρτηση είναι άρτια.

<u>Θέμα 4^o:</u>

A. Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$, τότε:

$x_1<x_2\Leftrightarrow {x_1}^5<{x_2}^5\Leftrightarrow 3{x_1}^5<3{x_2}^5$ **(1)**

$x_1<x_2\Leftrightarrow \dfrac{1}{x_1}>\dfrac{1}{x_2}\Leftrightarrow -\dfrac{2}{x_1}<-\dfrac{2}{x_2}$ **(2)**

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2) προκύπτει ότι: $f(x_1)<f(x_2)$.

Δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Β. Έστω ότι $\sqrt{3}<\sqrt[3]{5}$ τότε: $\left(\sqrt{3}\right)^6<\left(\sqrt[3]{5}\right)^6 \Leftrightarrow 3^3<5^2 \Leftrightarrow 27<25$ άτοπο.

Επομένως: $\sqrt{3}>\sqrt[3]{5} \overset{f-\text{γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow} f\left(\sqrt{3}\right)>f\left(\sqrt[3]{5}\right)$.

Γ. Είναι: $f(1)=3-2=1$ οπότε:

$f(x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)=1 \Leftrightarrow f(x)=f(1) \overset{f-\text{γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow} x=1$.

Δ. Η $f(x)=3x^5-\frac{2}{x}$ έχει $A_f=\mathbb{R}^*$, άρα $\forall x\in A_f$ το $-x\in A_f$.

Επίσης, $f(-x)=3(-x)^5-\frac{2}{-x}=-3x^5+\frac{2}{x}=-f(x)$, οπότε η f είναι περιττή, δηλαδή έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

Ε. $\varphi(x)=f(x+2)+3=3(x+2)^5-\frac{2}{x+2}+3$

$=3(x+2)^5-\frac{2}{x+2}+\frac{3x+6}{x+2}=3(x+2)^5+\frac{3x+4}{x+2},\ x\neq -2.$