ΤΕΣΤ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

100
Β' Λυκείου
Ον/μο:……………………… **Γεν. Παιδείας**
Ύλη: ιδιότητες συναρτήσεων **10-10-15**

<u>Θέμα 1$^{\text{ο}}$:</u>

Α. i. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της.

ii. Πότε μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο;

iii. Πότε μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέγεται άρτια; **(3x5=15 μον.)**

Β. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** **Σωστό** ή **(Λ)** **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Η συνάρτηση $f(x) = 3x + 5$ είναι γνησίως αύξουσα. **Σ Λ**

ii. Η συνάρτηση $f(x) = 5x^2 - 2x + 7$ είναι γνησίως μονότονη. **Σ Λ**

iii. Η συνάρτηση $f(x) = -3x^2 + 5$ παρουσιάζει μέγιστο. **Σ Λ**

iv. Η συνάρτηση $\varphi(x) = f(x+5) - 2$ είναι μετατόπιση της f κατά 5 μονάδες δεξιά και 2 μονάδες κάτω. **Σ Λ**

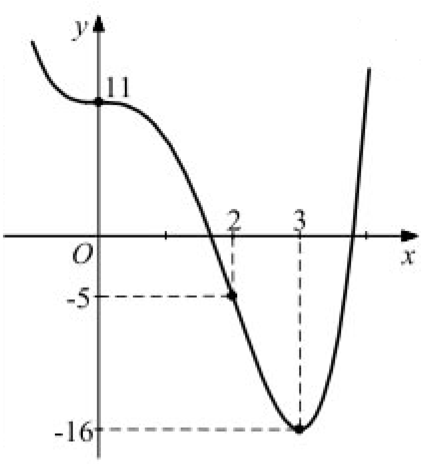
v. Κάθε συνάρτηση που έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων είναι περιττή. **Σ Λ**

(5x2=10μον.)

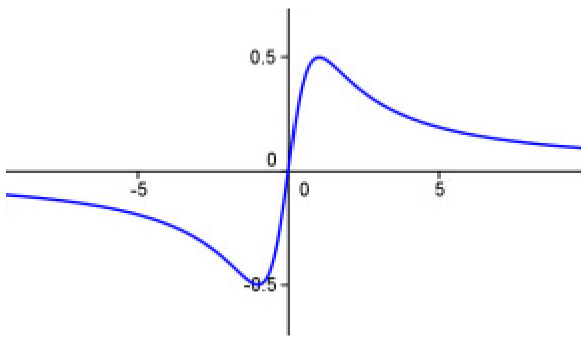
<u>Θέμα 2$^{\text{ο}}$:</u>

Α. Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα, να μελετήσετε τις συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να πείτε αν είναι άρτιες ή περιττές.

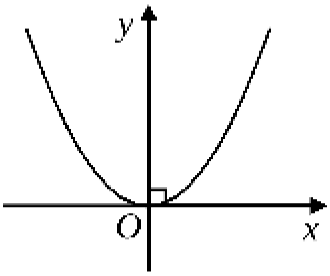
i.



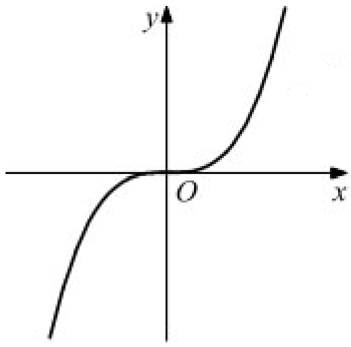
ii.



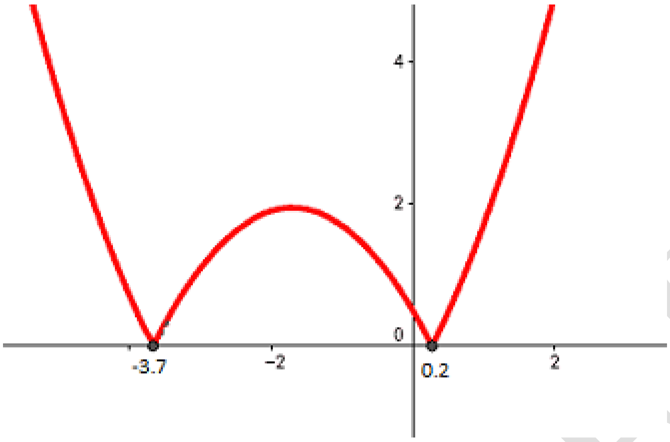
iii.



iv.



v.



(5x5=25 μον.)

<u>Θέμα 3ο:</u>

Α. Να μελετήσετε την $f(x)=-x^3+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+7$ ως προς τη μονοτονία. **(13 μον.)**

Β . Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης:

$$g(x)=-\frac{4}{|x|+3}.$$ **(12 μον.)**

<u>Θέμα 4ο:</u>

Α. Να εξετάσετε αν η $f(x)=\dfrac{5x^2+|x|-2}{x^4}$ είναι άρτια ή περιττή. **(12 μον.)**

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=7x^2-6$. Να βρείτε τη συνάρτηση η οποία είναι μετατόπιση της f κατά 2 μονάδες αριστερά και κατά 5 μονάδες προς τα κάτω. **(13 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1ο:

Α. i. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$.

ii. Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο όταν:

$$f(x) \le f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A.$$

iii. Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέγεται άρτια, για κάθε $x \in A$ ισχύει: $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$.

Β. i.Σ **ii.**Λ **iii.** Σ **iv.**Λ **v.**Σ

Θέμα 2ο:

Α. i. Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$. Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το -16 για x=3. Δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

ii. Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$, γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$. Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το -0,5 για x=-1 και ολικό μέγιστο το 0,5 για x=1. Είναι περιττή γιατί έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

iii. Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το 0 για x=0. Είναι άρτια γιατί έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y.

iv. Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$. Δεν παρουσιάζει ακρότατα. Είναι περιττή γιατί έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

v. Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty,\ 3,7]$ και $[-2,\ 0,2]$ και γνησίως αύξουσα στα $[-3,7,\ \text{-}2]$ και $[0,2,\ +\infty)$. Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το 0 για x=-3,7 και x=0,2. Η f δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

Θέμα 3ο:

Α. Έχουμε τη συνάρτηση: $f(x)=-x^3+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+7$

Για να ορίζεται η f πρέπει $x\geq 0$ και $x\neq 0$ οπότε $x>0$.
Δηλαδή, $A_f=(0,+\infty)$. Έστω $x_1,x_2\in A_f$ με $x_1<x_2$.

Τότε: $x_1<x_2\Leftrightarrow {x_1}^3<{x_2}^3\overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow}-{x_1}^3>-{x_2}^3$ **(1)**

$x_1<x_2\Leftrightarrow\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}>\dfrac{1}{\sqrt{x_2}}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}+7>\dfrac{1}{\sqrt{x_2}}+7$ **(2)**

Προσθέτοντας τις (1), (2) κατά μέλη έχουμε:

$$-{x_1}^3+\frac{1}{\sqrt{x_1}}+7>-{x_2}^3+\frac{1}{\sqrt{x_2}}+7\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.

Β. Έχουμε την $g(x)=-\dfrac{4}{|x|+3}$.

Η g ορίζεται όταν $|x|+3\neq 0\Leftrightarrow|x|\neq-3$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Τότε: $|x|\geq 0\Leftrightarrow|x|+3\geq 3\Leftrightarrow\dfrac{1}{|x|+3}\leq\dfrac{1}{3}\overset{\cdot(-4)}{\Leftrightarrow}-\dfrac{4}{|x|+3}\geq-\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow g(x)\geq-\dfrac{4}{3}$.

Δηλαδή η g παρουσιάζει ελάχιστο το $-\dfrac{4}{3}$ για x=0.

<u>Θέμα 4:</u>

Α. Έχουμε την $f(x)=\dfrac{5x^2+|x|-2}{x^4}$.

Η f ορίζεται όταν $x^4\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0\Rightarrow x\in\mathbb{R}^*$. Τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$, το $-x\in\mathbb{R}^*$ και είναι:

$f(-x)=\dfrac{5(-x)^2+|-x|-2}{(-x)^4}=\dfrac{5x^2+|x|-2}{x^4}=f(x)$, δηλαδή η f είναι άρτια.

Β. Για την $f(x)=7x^2-6$ έχουμε ότι $A=\mathbb{R}$. Τότε:

$\varphi(x)=f(x+2)-5=7(x+2)^2-6-5=7\left(x^2+4x+4\right)-11=$

$7x^2+28x+28-11=7x^2+28x+17$.