ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2016
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 217.

Α2. **α)** Βλέπε ορισμό σχολικού βιβλίου σελ. 241.

β) Βλέπε ορισμό σχολικού βιβλίου σελ. 151.

Α3. **α)** → Λάθος. Το σωστό είναι $f^{-1}\left(f\left(x\right)\right)=x,\, x\in A$.

β) → Λάθος. Το σωστό είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)\geq 0$.

γ) → Σωστό.

δ) → Λάθος. Το σωστό είναι: Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f\left(x_0\right)$ τότε η σύνθεση τους gof είναι συνεχής στο x_0.

ε) → Λάθος. Το σωστό είναι $f'\left(x\right)=a^x\cdot\ln a$.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση $f(x)=-e^{3x}-x^3+1$ έχει πεδίο ορισμού το R.
Έστω $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$.

- Τότε έχουμε διαδοχικά:
  $3x_1<3x_2$ και $x_1^3<x_2^3$
  $e^{3x_1}<e^{3x_2}$ και $-x_1^{\;3}>-x_2^{\;3}$
  $-e^{3x_1}>-e^{3x_2}$ (1) και $-x_1^{\;3}+1>-x_2^{\;3}+1$ (2).

  Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:
  $-e^{3x_1}-x_1^{\;3}+1>-e^{3x_2}-x_2^{\;3}+1$.
  Επομένως $f(x_1)>f(x_2)$.
  Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

- Παρατηρούμε ότι $f(0)=-e^0-0+1=-1+1=0$.
  Άρα η f έχει τουλάχιστον, μια ρίζα, το $x_0=0$.
  Αυτή είναι και μοναδική, γιατί η f είναι γνησίως φθίνουσα.

- Έτσι για κάθε $x>0$ επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα ισχύει
  $f(x)<f(0)$,δηλαδή $f(x)<0$.
  Ενώ για κάθε $x<0$ ισχύει $f(x)>f(0)$,οπότε $f(x)>0$.
  Το πρόσημο της f φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Β2. Επειδή η f είναι συνεχής στο R, γιατί προέρχεται από πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις, είναι και συνεχής στο $x_0=0$.
Οπότε ισχύει: $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$.
Για $x\neq 0$ έχουμε: $\dfrac{f(x)-1}{f(x)}=1-\dfrac{1}{f(x)}$.

Για $x>0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[1-\dfrac{1}{f(x)}\right]=+\infty$.

Όντως, στο Β1 ερώτημα αποδείξαμε, ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)<0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$.

Για $x<0$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[1-\dfrac{1}{f(x)}\right]=-\infty$.

Όντως, στο Β1 ερώτημα αποδείξαμε, ότι για κάθε $x<0$ ισχύει $f(x)>0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$.

Επομένως, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{f(x)}$.

Β3. **α)** Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R, είναι και 1–1, επομένως αντιστρέφεται.
Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης, είναι το σύνολο τιμών της f.
Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο R. Έτσι, το σύνολο τιμών της, είναι το $f(R)=(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x))=(-\infty,+\infty)=R$.

Ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-e^{3x}-x^3+1\right)=-\infty$.

  -Ειδικά $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{3x}=\lim\limits_{u\to+\infty}e^{u}=+\infty$.

  Θέσαμε $u=3x$, οπότε αν $x\to+\infty$ τότε $u\to+\infty$.

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3\right)=-\infty$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-e^{3x}-x^3+1\right)=+\infty$.

  -Ειδικά $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{3x}=\lim\limits_{u\to-\infty}e^{u}=0$.

  Θέσαμε $u=3x$ οπότε αν $x\to-\infty$ τότε $u\to-\infty$,

  ενώ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3\right)=+\infty$.

β) Ισχύουν ισοδύναμα:

$$e^{-e^{3x}-x^3-2015}=1\Leftrightarrow e^{-e^{3x}-x^3-2015}=e^0\Leftrightarrow -e^{3x}-x^3-2015=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -e^{3x}-x^3+1=2016\Leftrightarrow f(x)=2016.$$

Θέλουμε, λοιπόν, να δείξουμε ότι, η εξίσωση $f(x)=2016$ έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in R$. Όμως η f είναι συνεχής στο R και η τιμή $2016 \in f(R)=R$.

Άρα η εξίσωση $f(x)=2016$, έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα $x_0 \in R$.

Αυτή είναι μοναδική, καθώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

Β4. Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$e^{3g(x)}+g^3(x)=x^3e^6+(\ln x+2)^3$$
$$\overset{x^3e^6>0}{\Leftrightarrow} e^{3g(x)}+g^3(x)=e^{\ln(x^3e^6)}+(\ln x+2)^3$$
$$\Leftrightarrow e^{3g(x)}+g^3(x)=e^{\ln x^3+\ln e^6}+(\ln x+2)^3$$
$$\overset{x>0}{\Leftrightarrow} e^{3g(x)}+g^3(x)=e^{3\ln x+6}+(\ln x+2)^3$$
$$\Leftrightarrow e^{3g(x)}+g^3(x)=e^{3(\ln x+2)}+(\ln x+2)^3$$
$$\Leftrightarrow -e^{3g(x)}-g^3(x)=-e^{3(\ln x+2)}-(\ln x+2)^3$$
$$\Leftrightarrow -e^{3g(x)}-g^3(x)+1=-e^{3(\ln x+2)}-(\ln x+2)^3+1$$
$$\Leftrightarrow f(g(x))=f(\ln x+2)\overset{f\,1-1}{\Leftrightarrow} g(x)=\ln x+2.$$

- Για την εύρεση της αντίστροφης της g, θέτουμε $y=g(x)$ και λύνουμε ως προς x.
  Έχουμε λοιπόν ισοδύναμα:
  $g(x)=y\Leftrightarrow y=\ln x+2, y\in R$, καθώς $\ln x+2\in R$, για κάθε $x>0$.

$$\left.\begin{array}{l}\ln x=y-2\Leftrightarrow x=e^{y-2}, y\in R\\ \acute{o}\mu\omega\varsigma\ f^{-1}(y)=x\end{array}\right\}\ \text{οπότε } f^{-1}(y)=e^{y-2}, y\in R$$

και έτσι $f^{-1}(x)=e^{x-2}, x\in R$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ έχουμε ισοδύναμα:

$$f^2(x)+2xf(x)=1-\sigma\upsilon\nu^2x-x^2$$
$$\Leftrightarrow f^2(x)+2xf(x)+x^2=\eta\mu^2x$$
$$\Leftrightarrow (f(x)+x)^2=\eta\mu^2x \qquad \textbf{(1)}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)+x, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται $h^2(x)=\eta\mu^2x$ (2) και ισχύει για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Η εξίσωση $h(x)=0$ στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ γράφεται ισοδύναμα:

$h(x)=0 \Leftrightarrow h^2(x)=0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \eta\mu^2 x=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=0 \Leftrightarrow x=0$.

Επομένως, η εξίσωση $h(x)=0$ έχει στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ μοναδική ρίζα την $x=0$.

Η h στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ είναι συνεχής, ως άθροισμα συνεχών και δεν μηδενίζεται σ' αυτό. Άρα, στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ η h διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Όμως $h\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}>0$.

Συνεπώς για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$,ισχύουν $h(x)>0$ και $\eta\mu x>0$.

Οπότε η σχέση (2) γίνεται ισοδύναμα $h(x)=\eta\mu x$ ή ισοδύναμα $f(x)+x=\eta\mu x$ και τελικά $f(x)=\eta\mu x-x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$. Επιπλέον ισχύει $f(0)=\eta\mu 0-0=0$.

Εντέλει δείξαμε ότι, $f(x)=\eta\mu x-x, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Γ2.

Έχουμε $g(x)=\begin{cases} f(x)+1, & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{\eta\mu(\kappa x)}{x}-1, & x<0 \end{cases}$,με $\kappa\in R$.

-Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ η g είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών.

-Για κάθε $x\in(-\infty,0)$ η g είναι συνεχής γιατί προέρχεται από πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις.

Επομένως, πρέπει η g να είναι συνεχής στο $x_0=0$. Οπότε ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=g(0)$ (1).

-Για $x>0$, έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(f(x)+1)=f(0)+1=1$ (2).

Έχουμε δείξει στο Γ1, ότι η f είναι συνεχής στο 0, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0$.

-Για $x<0$, έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\frac{\eta\mu(\kappa x)}{x}-1\right]=\kappa-1$ (3).

Αν θέσουμε $u = \kappa x$, τότε $\lim\limits_{x\to 0^-} u = \lim\limits_{x\to 0^-}(\kappa x) = 0$.

Έτσι, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\eta\mu(\kappa x)}{x} = \kappa \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\eta\mu(\kappa x)}{\kappa x} = \kappa \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u} = \kappa\cdot 1 = \kappa$.

Επίσης $g(0) = f(0)+1 = 1$ (4).

Η σχέση (1) λόγω των σχέσεων (2), (3) και (4) γίνεται ισοδύναμα:
$1 = \kappa - 1 = 1$. Οπότε $\kappa - 1 = 1$ και άρα $\kappa = 2$.

Γ3. Για $\kappa = 2$ η g γίνεται:

$$g(x) = \begin{cases} f(x)+1, & x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ \dfrac{\text{ημ}2x}{x} - 1, & x < 0 \end{cases}$$

Η g είναι ορισμένη και συνεχής στο $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$.

- $g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\text{ημ}\left[2\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]}{-\dfrac{\pi}{2}} - 1 = \dfrac{\text{ημ}(-\pi)}{-\dfrac{\pi}{2}} - 1 = \dfrac{\eta\mu\pi}{\dfrac{\pi}{2}} - 1 = 0 - 1 = -1$
- $g(0) = 1$

Άρα $g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot g(0) < 0$.

Έτσι από το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $g(x) = 0$, έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$.

Γ4. Παρατηρούμε ότι $g(-2\pi) = \dfrac{\eta\mu(-4\pi)}{-2\pi} - 1 = \dfrac{\eta\mu 4\pi}{2\pi} - 1 = 0 - 1 = -1$. Επίσης από ερώτημα Γ3, $g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$.

Έτσι ισχύει $g(-2\pi) = g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ ενώ $-2\pi \neq -\dfrac{\pi}{2}$.

Ώστε η g δεν είναι $1-1$.

Ένας δεύτερος τρόπος στην περίπτωση που δεν μπορούμε να υπολογίσουμε δύο ίσες τιμές, είτε στον ίδιο κλάδο, είτε σε διαφορετικούς κλάδους.

Παρατηρούμε $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)+1=\eta\mu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+1=2-\frac{\pi}{2}$.

Θα δείξουμε ότι υπάρχει ένα $x_0\in(-\infty,0)$, ώστε $g(x_0)=2-\frac{\pi}{2}$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)==\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\eta\mu 2x}{x}-1\right)=0-1=-1$, γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu 2x}{x}=0$.

Απόδειξη:

$|\eta\mu 2x|\le 1\Leftrightarrow|\eta\mu 2x|\cdot\left|\frac{1}{x}\right|\le\left|\frac{1}{x}\right|$

$\left|\frac{\eta\mu 2x}{x}\right|\le\left|\frac{1}{x}\right|\Leftrightarrow-\left|\frac{1}{x}\right|\le\frac{\eta\mu 2x}{x}\le\left|\frac{1}{x}\right|$

Όμως $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$, οπότε, από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu 2x}{x}=0$.

Ισχύει $\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{\eta\mu 2x}{x}-1\right)=1$.

Έστω η συνάρτηση $\Lambda(x)=g(x)-(2-\frac{\pi}{2}),\ x<0$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\Lambda(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[g(x)-(2-\frac{\pi}{2})\right]=-1-2+\frac{\pi}{2}=-3+\frac{\pi}{2}<0$.

Άρα υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός α, κοντά στο $-\infty$, ώστε να ισχύει ισοδύναμα: $\Lambda(\alpha)<0\Leftrightarrow g(\alpha)-(2-\frac{\pi}{2})<0\Leftrightarrow g(\alpha)<2-\frac{\pi}{2}$.

- $\lim\limits_{x\to0^-}\Lambda(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left[g(x)-(2-\frac{\pi}{2})\right]=\lim\limits_{x\to0^-}\left[\frac{\eta\mu 2x}{x}-1-2+\frac{\pi}{2}\right]=2-1-2+\frac{\pi}{2}=-1+\frac{\pi}{2}>0$

Άρα υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $\beta<0$,κοντά στο 0, ώστε να ισχύει ισοδύναμα:

$\Lambda(\beta)>0\Leftrightarrow g(\beta)-(2-\frac{\pi}{2})>0\Leftrightarrow g(\beta)>2-\frac{\pi}{2}$.

Επομένως $g(a)<2-\frac{\pi}{2}<g(\beta)$ και η g είναι συνεχής στο $[a,\beta]\subseteq(-\infty,0)$. Από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(a,\beta)$ άρα και στο $(-\infty,0)$ ώστε $g(x_0)=2-\frac{\pi}{2}$. Εντέλει $g(x_0)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ενώ, $x_0\in(-\infty,0)$ και $\frac{\pi}{2}\in(0,+\infty)$. Άρα $x_0\ne\frac{\pi}{2}$. Οπότε η g δεν είναι $1-1$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x)=e^x+\frac{x^2}{2}, x\in R$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=(e^x)'+(\frac{x^2}{2})'=e^x+x, x\in R$.

Έστω $x_1,x_2\in R$, $\mu\varepsilon$ $x_1<x_2$, τότε ισχύει $e^{x_1}<e^{x_2}$.
Με πρόσθεση κατά μέλη, προκύπτει: $e^{x_1}+x_1<e^{x_2}+x_2$, ,δηλαδή $f'(x_1)<f'(x_2)$.
Επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα το σύνολο τιμών της είναι:
$f'\left((-\infty,+\infty)\right)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\right)=(-\infty,+\infty)=R$.
Όντως, $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+x\right)=-\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$.
Όντως, $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+x\right)=+\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

Το $0\in f'(R)=R$, άρα, υπάρχει ένας τουλάχιστον $\rho\in R$ τέτοιος ώστε $f'(\rho)=0$.
Ο ρ είναι μοναδικός, διότι η f' είναι γνησίως αύξουσα.
Τελικά, η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα ρ.

Δ2. Για $x\neq\rho$, έχουμε:

$$\lim_{x\to\rho}\frac{f(x)+f'(x)-f(\rho)}{x-\rho}\overset{f'(\rho)=0}{=}\lim_{x\to\rho}\left(\frac{f(x)-f(\rho)}{x-\rho}+\frac{f'(x)-f'(\rho)}{x-\rho}\right)=$$

$=f'(\rho)+f''(\rho)=0+e^\rho+1=e^\rho+1$, διότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)=e^x+1, x\in R$.

Δ3. **α)** Ισχύει: $\lim\limits_{h\to0}\frac{g(x_0+\nu h)-g(x_0)}{h}=\nu,\nu\in N^*$ και $\nu\neq1$.

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ίσο με 1.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to0}\frac{g(x_0+\nu h)-g(x_0)}{\nu h}=\frac{1}{\nu}\cdot\lim_{h\to0}\frac{g\left(x_0+\nu h\right)-g\left(x_0\right)}{h}=\frac{1}{\nu}\cdot\nu=1$$

Θέσαμε $x_0+\nu h=x\Leftrightarrow x-x_0=\nu h\Leftrightarrow h=\frac{x-x_0}{\nu}$.

Αν $x\to x_0$ τότε $h\to0$.
Επομένως, $g'(x_0)=1$.

β) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A\left(0, f\left(0\right)\right)$ έχει εξίσωση:
$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y-1 = x \Leftrightarrow y = x+1$.
Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο της $\mathrm{B}\left(x_0, g\left(x_0\right)\right)$ έχει εξίσωση:
$y - g(x_0) = g'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y - x_0 - 1 = 1(x-x_0) \Leftrightarrow y = x+1$.
Προφανώς οι δύο εφαπτόμενες συμπίπτουν.

Δ4. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $g'(x_0)=1$.
Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0) = x_0 + 1$, με
$f'(g(x_0)) = f'(x_0+1) = e^{x_0+1} + x_0 + 1$.
Η fog είναι παραγωγίσιμη στο x_0, με: $(fog)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0) = e^{x_0+1} + x_0 + 1$.