ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

98

Ον/μο:……………….. **Α΄ Λυκείου**

Ύλη: Το σύνολο R **6-11-2016**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να γράψετε τα σύνολα των αριθμών που γνωρίζετε.
(Ονομασία-αναγραφή ή περιγραφή τους) **(μον.5)**

Α2. Να δώσετε τον ορισμό της απόλυτης τιμής ενός πραγματικού αριθμού α. (αλγεβρικό και γεωμετρικό) **(μον.5)**

Α3. Αν $\alpha,\beta \geq 0$, $\nu \in N^*$, να αποδείξετε ότι: $\sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$ **(μον.5)**

Α4. Να κυκλώσετε το (Σ) ή το (Λ) στις προτάσεις:

1. $\sqrt[2\nu]{\alpha^{2\nu}} = |\alpha|$ Σ Λ

2. $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma \Rightarrow \beta = \gamma$ Σ Λ

3. $\alpha^2 = \beta^2 \Rightarrow \alpha = \beta$ Σ Λ

4. $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)$ Σ Λ

5. $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ Σ Λ

(μον.10)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Να αποδείξετε ότι: $(\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 + 2(\alpha^2 - \beta^2) = 4\alpha^2$ **(μον.5)**

Β2. Αν $4x^2 + y^2 + \omega^2 - 4x + 2y + 2 = 0$ βρείτε τους x, y, ω. **(μον.5)**

Β3. Αν $\alpha < \beta$ δείξτε ότι: $\alpha^5 + \alpha^3 + 2\alpha < \beta^5 + \beta^3 + 2\beta$ **(μον.5)**

Β4. Αν $0 < \alpha < \beta$, να διατάξετε κατά σειρά μεγέθους τους

$\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha}$ και $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}$. **(μον.5)**

Β5. Αποδείξτε ότι: $\big||\alpha| + \alpha\big| - \big||\alpha| - \alpha\big| = 2\alpha$. **(μον.5)**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\sqrt{3+\sqrt{5}}$ και $\beta=\sqrt{3-\sqrt{5}}$.

Να αποδείξετε ότι:

α. $\alpha+\beta=\sqrt{10}$ **β.** $\alpha\cdot\beta=2$

γ. $\alpha^2+\beta^2=6$ **δ.** $\alpha^3+\beta^3=4\sqrt{10}$ **(μον.16)**

Γ2. Δίνεται ότι: $|x|<2$ και η παράσταση

$A=\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt[4]{(x-2)^4}+\sqrt[6]{(x+2)^6}$.

α. Να απλοποιήσετε την παράσταση Α. **(μον.5)**

β. Να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της. **(μον.4)**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αν $(\alpha-1)^2+|2\alpha-\beta|+\sqrt[3]{\alpha-\beta+\gamma}=0$ να βρείτε τους α, β, γ. **(μον.5)**

Δ2. Οι αριθμοί α και β είναι πλευρές ορθογωνίου και ισχύει η ισότητα $(\alpha-3)^2+(\beta-4)^2=4$.

α. Να αποδείξετε ότι: $1\le\alpha\le5$ και $2\le\beta\le6$. **(μον.5)**

β. Να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών περιέχεται η διαγώνιός του. **(μον.5)**

Δ3. Αν $\sqrt{21+x^2}+\sqrt{12+x^2}=9$ να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=\sqrt{21+x^2}-\sqrt{12+x^2}$. **(μον.5)**

Δ4. Σε πόσα μηδενικά τελειώνει ο αριθμός $(-4)^{3000}\cdot(-1,25)^{2000}$; **(μον.5)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1, Α2, Α3 Θεωρία
Α4. 1Σ, 2Λ, 3Λ, 4Λ, 5Λ

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1. Ξεκινάμε απ' το 1ο μέλος και έχουμε:

$$(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2+2(\alpha^2-\beta^2)=$$
$$=(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2+2(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=$$
$$=[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]^2=(2\alpha)^2=4\alpha.$$

Β2. Εχουμε:

$$4x^2+y^2+\omega^2-4x+2y+2=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(4x^2-4x+1)+(y^2+2y+1)+\omega^2=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(2x-1)^2+(y+1)^2+\omega^2=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x-1=0 \text{ και } y+1=0 \text{ και } \omega=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \text{ και } y=-1 \text{ και } \omega=0.$$

Β3. Εχουμε:

$$\alpha<\beta\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha^5<\beta^5\\ \alpha^3<\beta^3\\ 2\alpha<2\beta\end{array}\right|\overset{(+)}{\Rightarrow}\alpha^5+\alpha^3+2\alpha<\beta^5+\beta^3+2\beta.$$

Β4. Αφού $0<\alpha<\beta\Rightarrow\dfrac{\alpha}{\beta}<1$ και $\dfrac{\beta}{\alpha}>1$ (1)

Είναι: $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{\alpha^2}{\alpha\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$ (2)

Απ' τις (1) και (2) προκύπτει ότι: $\dfrac{\alpha}{\beta}<\dfrac{\beta}{\alpha}<\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$

Β5. Είναι γνωστό ότι $|\alpha|\ge\alpha$ και $|\alpha|\ge-\alpha$ άρα $|\alpha|-\alpha\ge0$ και $|\alpha|+\alpha\ge0$.

Εχουμε λοιπόν:

$$\big||\alpha|+\alpha\big|-\big||\alpha|-\alpha\big|=(|\alpha|+\alpha)-(|\alpha|-\alpha)=|\alpha|+\alpha-|\alpha|+\alpha=2\alpha.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.α) Είναι: $(\alpha+\beta)^2=\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2=$

$=\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2+\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2+2\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)=$

$=3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}+2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}=6+2\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=$

$=6+2\sqrt{4}=6+4=10$.

Αφού $(\alpha+\beta)^2=10$ και α,β>0 είναι α+β=$\sqrt{10}$.

β) Είναι: $\alpha\cdot\beta=\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)=\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}=$

$=\sqrt{3^2-\sqrt{5}^2}=\sqrt{9-5}=\sqrt{4}=2$.

γ) Είναι: $\alpha^2+\beta^2=\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2+\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2=3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}=6$.

δ) Είναι: $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)=\sqrt{10}\cdot(6-2)=4\sqrt{10}$.

Γ2.α) Αφού $|x|<2\Leftrightarrow -2<x<2$ και $x-3<0$, $x-2<0$, $x+2>0$.

Η παράσταση Α γράφεται:

$A=\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt[4]{(x-2)^4}+\sqrt[6]{(x+2)^6}=$

$=|x-3|+|x-2|+|x+2|=(-x+3)+(-x+2)+(x+2)=-x+7$.

β) Είναι: $-2<x<2\Rightarrow -2<-x<2\Rightarrow -2+7<-x+7<2+7\Rightarrow$

$5<-x+7<9$, άρα $5<A<9$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αφού $(\alpha-1)^2+|2\alpha-\beta|+\sqrt[3]{\alpha-\beta+\gamma}=0$ (άθροισμα μη αρνητικών), θα είναι:

$\alpha-1=0$ και $2\alpha-\beta=0$ και $\alpha-\beta+\gamma=0 \Rightarrow \alpha=1$ και $\beta=2$ και $\gamma=1$.

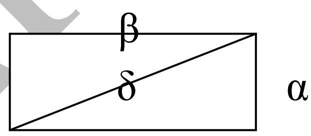
Δ2.α) Αφού $(\alpha-3)^2+(\beta-4)^2=4$ θα είναι:

$(\alpha-3)^2\le 4$ και $(\beta-4)^2\le 4 \Rightarrow \sqrt{(\alpha-3)^2}\le\sqrt{4}$ και $\sqrt{(\beta-4)^2}\le\sqrt{4}$

$\Rightarrow |\alpha-3|\le 2$ και $|\beta-4|\le 2 \Rightarrow -2\le\alpha-3\le 2$ και $-2\le\beta-4\le 2 \Rightarrow$

$1\le\alpha\le 5$ και $2\le\beta\le 6$.

β) Από Π.Θ. είναι: $\delta^2=\alpha^2+\beta^2 \Rightarrow \delta=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ **(1)**



Είναι:

$$\left.\begin{array}{l}1\le\alpha\le 5\\ 2\le\beta\le 6\end{array}\right|\Rightarrow \left.\begin{array}{l}1\le\alpha^2\le 25\\ 4\le\beta^2\le 36\end{array}\right|\overset{(+)}{\Rightarrow} 5\le\alpha^2+\beta^2\le 61 \Rightarrow \sqrt{5}\le\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\le\sqrt{61}$$

Απ' την (1) είναι $\sqrt{5}\le\delta\le\sqrt{61}$.

Δ3. Εχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{21+x^2}+\sqrt{12+x^2}=9\\ \sqrt{21+x^2}-\sqrt{12+x^2}=A\end{array}\right|\overset{(\cdot)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{21+x^2}+\sqrt{12+x^2}\right)\left(\sqrt{21+x^2}-\sqrt{12+x^2}\right)=9A\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{21+x^2}\right)^2-\left(\sqrt{12+x^2}\right)^2=9A\Rightarrow 21+x^2-12-x^2=9A\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9=9A\Rightarrow A=1.$$

Δ4. Εχουμε: $(-4)^{3000}\cdot(-1,25)^{2000}=$

$$=4^{3000}\cdot(1,25)^{2000}=(2^2)^{3000}\cdot\left(\frac{125}{100}\right)^{2000}=2^{6000}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{2000}=2^{6000}\cdot\frac{5^{2000}}{4^{2000}}=$$

$$=2^{6000}\cdot\frac{5^{2000}}{(2^2)^{2000}}=\frac{2^{6000}}{2^{4000}}\cdot 5^{2000}=2^{2000}\cdot 5^{2000}=(2\cdot 5)^{2000}=10^{2000}.$$

Ο αριθμός λοιπόν τελειώνει σε 2000 μηδενικά.