

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

97

Ύλη: Εξισώσεις-Ανισώσεις-Ακολουθίες
 Ον/μο:.....

Α' Λυκείου
 20-3-2016

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να δοθεί ο ορισμός της γεωμετρικής προόδου. (μον.5)
- A2.** Να δοθεί ο ορισμός της εξίσωσης δευτέρου βαθμού. (μον.5)
- A3.** Να αποδείξετε ότι ο νιοστός όρος αριθμητικής προόδου δίνεται απ' τον τύπο $a_n = a_1 + (n - 1)\omega$. (μον.5)
- A4.** Στις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε τη (Σ) ή την (Λ)
- | | | |
|--|---|---|
| 1. Αν $x \geq 0$ τότε $ x = x$ | Σ | Λ |
| 2. Η εξίσωση $x^2 + ax - 1 = 0$ έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $a \in \mathbb{R}$ | Σ | Λ |
| 3. Αν $d(x, 2) < 5$ τότε $-3 < x < 7$ | Σ | Λ |
| 4. Αν $\alpha < 1 < \beta$ τότε $(1 - \alpha)(1 - \beta)(\alpha - \beta)\beta > 0$ | Σ | Λ |
| 5. Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0, a \neq 0$ γράφεται $x^2 - Sx + P = 0$ | Σ | Λ |
| 6. Η ακολουθία $a_n = 3n + 5$ είναι αριθμητική πρόοδος. | Σ | Λ |
| 7. Αν οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου τότε ο β είναι ο γεωμετρικός μέσος των α, β, γ . | Σ | Λ |
| 8. Έστω (a_n) γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ . Οι αριθμοί $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2\mu+1}$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο λ^2 . | Σ | Λ |
| 9. Έστω (a_n) αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω . Οι αριθμοί a_1, a_4, a_7, \dots δημιουργούν μια νέα αριθμητική πρόοδο με διαφορά 2ω . | Σ | Λ |
| 10. Σε μια αριθμητική πρόοδο με 10 όρους ο 4 ^{ος} όρος από το τέλος είναι ο a_7 | Σ | Λ |
- (μον.10)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η παράσταση $A(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 + 2x}$

B1. Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα η παράσταση A και να την απλοποιήσετε. (μον.7)

B2. Να υπολογίσετε την παράσταση : $\Pi = \frac{A(3) - A(1)}{\sqrt{A(4) - 2}}$ (μον.9)

B3. Να λυθεί η εξίσωση : $|A(4) \cdot x - 1| = |2 - A(3) \cdot x|$ (μον.9)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda + 1) \cdot x + \lambda = 0$ (1)

Γ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του λ . (μον.8)

Γ2. Αν x_1, x_2 ρίζες της (1) να βρείτε το λ ώστε $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10$ (μον.8)

Γ3. Για $\lambda=3$, να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες $2x_1$ και $2x_2$ (μον.9)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Να λυθεί η ανίσωση $3|x - 1| - 2 \leq 2 \cdot |1 - x|$ (μον.3)

Δ2. Να λυθεί η εξίσωση $(x - 1)^4 - 3(x - 1)^2 - 4 = 0$ (μον.3)

Δ3. Αν η εξίσωση $x^2 - 2(\beta - 1)x - |\alpha| = 0$ έχει διπλή ρίζα

α) Να βρείτε τα α και β (μον.3)

β) Για $\alpha=0$ και $\beta=1$ να λύσετε την ανίσωση :

$(x^2 - \beta)^2 - |x^2 - \beta| - \alpha\beta - 6 \leq 0$ (μον.5)

Δ4. Η τιμή αγοράς ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή είναι μεγαλύτερη από 620€ και μικρότερη από 640€ .Κατά την αγορά συμφωνήθηκαν τα εξής :

- Να δοθεί προκαταβολή 120€ .
- Η εξόφληση του υπόλοιπου ποσού να γίνει σε 10 μηνιαίες δόσεις .
- Κάθε δόση να είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη κατά ω € , όπου ω θετικός ακέραιος .
- Η τέταρτη δόση να είναι 48€ .

1.Να βρείτε την τιμή του ω .

(μον.3)

2.Να βρείτε το ποσό της τελευταίας δόσης , αν $\omega=2$.

(μον.3)

3.Να βρείτε την τιμή της αγοράς του υπολογιστή .

(μον.5)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

A1, A2, A3 Θεωρία

A4. 1Σ, 2Σ, 3Σ, 4Σ, 5Σ, 6Σ, 7Λ, 8Σ, 9Λ, 10Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Πρέπει $x^2 + 2x \neq 0 \Leftrightarrow x(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $x \neq -2$.

$$\text{Είναι: } A(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 + 2x} = \frac{x(x^2 - 4)}{x(x+2)} = \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = x-2$$

B2. Είναι: $A(3) = 3 - 2 = 1$, $A(1) = 1 - 2 = -1$, $A(4) = 4 - 2 = 2$. Άρα

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1 - (-1)}{\sqrt{2} - 2} = \frac{2}{\sqrt{2} - 2} = \frac{2(\sqrt{2} + 2)}{(\sqrt{2} - 2)(\sqrt{2} + 2)} = \frac{2(\sqrt{2} + 2)}{(\sqrt{2})^2 - 4} = \frac{2(\sqrt{2} + 2)}{-2} \\ &= -(\sqrt{2} + 2). \end{aligned}$$

B3. $|A(4)x - 1| = |2 - A(3)x| \Leftrightarrow |2x - 1| = |2 - x| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = 2 - x \text{ ή } 2x - 1 = -2 + x \Leftrightarrow 3x = 3 \text{ ή } x = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η (1) έχει $\Delta = [-(\lambda + 1)]^2 - 4\lambda = (\lambda + 1)^2 - 4\lambda = \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 4\lambda =$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 \geq 0 \text{ άρα έχει πραγματικές ρίζες.}$$

Γ2. Απ' τους τύπους του Vieta

$$\text{έχουμε: } x_1 + x_2 = -\frac{-(\lambda + 1)}{1} = \lambda + 1 \text{ και } x_1 x_2 = \frac{\lambda}{1} = \lambda.$$

$$\text{Αφού } (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 10 \Rightarrow (\lambda + 1)^2 - 2\lambda = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 2\lambda = 10 \Leftrightarrow \lambda^2 = 9 \Leftrightarrow \lambda = \pm 3.$$

Γ3. Για $\lambda = 3$ η (1) γίνεται:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ ή } x_2 = 3. \text{ Άρα } 2x_1 = 2, 2x_2 = 6.$$

Η νέα εξίσωση έχει τη μορφή

$$x^2 - Sx + P = 0 \text{ με } S = 2x_1 + 2x_2 = 8 \text{ και } P = 2x_1 \cdot 2x_2 = 12, \text{ είναι λοιπόν}$$

$$\text{η } x^2 - 2x + 12 = 0.$$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. 3|x-1|-2 \leq 2|1-x| \Leftrightarrow 3|x-1|-2 \leq 2|x-1| \Leftrightarrow |x-1| \leq 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2 \leq x-1 \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3.$$

Δ2. Θέτω $(x-1)^2 = \omega$ και η εξίσωση γράφεται:

$$\omega^2 - 3\omega - 4 = 0 \Leftrightarrow \omega = -1 \text{ ή } \omega = 4. \text{ Δεκτή μόνο η } \omega = 4, \text{ άρα} \\ (x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow x-1 = 2 \text{ ή } x-1 = -2 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = -1.$$

Δ3. α) Αφού η εξίσωση έχει διπλή ρίζα θα έχει

$$\Delta = 0 \Rightarrow [-2(\beta-1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-|\alpha|) = 0 \Leftrightarrow 4(\beta-1)^2 + 4|\alpha| = 0 \Leftrightarrow \\ (\beta-1)^2 + |\alpha| = 0 \Leftrightarrow (\beta-1)^2 = 0 \text{ και } |\alpha| = 0 \Leftrightarrow \beta = 1 \text{ και } \alpha = 0.$$

β) Η ανίσωση γράφεται:

$$(x^2-1)^2 - |x^2-1| - 6 \leq 0 \Leftrightarrow |x^2-1|^2 - |x^2-1| - 6 \leq 0 \quad |x^2-1| = \omega \geq 0 \\ \Leftrightarrow \omega^2 - \omega - 6 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \omega \leq 3 \text{ άρα } 0 \leq |x^2-1| \leq 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |x^2-1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x^2-1 \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq x^2 \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{4} \Leftrightarrow |x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2.$$

Δ4.

Έστω x η τιμή αγοράς. Αυτή προκύπτει από την προκαταβολή και τις 10 δόσεις, οι οποίες αποτελούν αριθμητική πρόοδο, έστω α_1 ο πρώτος όρος και ω η διαφορά. Τότε είναι:

$$620 < x < 640 \Leftrightarrow 620 < 120 + S_{10} < 640 \Leftrightarrow$$

$$500 < \frac{10}{2} [2\alpha_1 + 9 \cdot \omega] < 520 \Leftrightarrow 500 < 5(2\alpha_1 + 9\omega) < 520$$

$$100 < 2\alpha_1 + 9\omega < 104 \quad (1)$$

1. Είναι $\alpha_4 = 48 \Leftrightarrow \alpha_1 + 3\omega = 48 \Leftrightarrow \alpha_1 = 48 - 3\omega$ (2)

(2)
 Η (1) $\Rightarrow 100 < 2(48 - 3\omega) + 9\omega < 104 \Leftrightarrow$

$$100 < 96 - 6\omega + 9\omega < 104 \Leftrightarrow 4 < 3\omega < 8 \Leftrightarrow \frac{4}{3} < \omega < \frac{8}{3} .$$

Επειδή το ω είναι θετικός ακέραιος έχει τιμή $\omega=2$ και $\alpha_1=42$

2. Η τελευταία, $10^{\text{η}}$, δόση είναι $\alpha_{10} = \alpha_1 + 9\omega$ δηλ

$$\alpha_{10} = 42 + 9 \cdot 2 \Rightarrow \alpha_{10} = 60\text{€}$$

3. Η τιμή αγοράς είναι :

$$x = 10 + S_{10} = 120 + \frac{10}{2}(2\alpha_1 + 9\omega) = 120 + 5(2 \cdot 42 + 9 \cdot 2) \text{ δηλ}$$

$$x = 630\text{€} .$$