ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

96

Ον/μο:……………….. **Α΄ Λυκείου**

Ύλη: Πιθανότητες- Το σύνολο R **29-11-2015**

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1. Να αποδείξετε ότι: $|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|,\quad \alpha,\beta\in R$. **(μον.6)**

Α2. Να δώσετε τον ορισμό της απόλυτης τιμής ενός πραγματικού αριθμού α. **(μον.4)**

Α3. Να συμπληρώσετε τα κενά:

1. $........\le|\alpha+\beta|\le........$

2. $x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)\Leftrightarrow|.......|\ge....$

3. $P(A\cup B)=.......................$

4. $\alpha^3-\beta^3=.....................$

5. $(\alpha-2)^2+(\beta+3)^2+(\gamma-7)^2=0\Leftrightarrow.......................$ **(μον.5)**

Α4. Να κυκλώσετε το Σ ή το Λ στις προτάσεις:

1. Αν $\alpha<-2$ και $\beta<-3$ τότε $\alpha\cdot\beta>6$ Σ Λ

2. $(4\alpha^2-20\alpha\beta+25\beta^2)\ge0$ Σ
Λ

3. Αν $\alpha\cdot\beta\ge0$ τότε $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$ Σ Λ

4. Αν τα ενδεχόμενα Α και Β δεν είναι ξένα μεταξύ τους τότε μπορεί να ισχύει $P(A)+P(B)=1{,}3$ Σ Λ

5. Αν $\alpha^2=\beta^2$ τότε $\alpha=\beta$ Σ Λ

6. $\alpha\le x<\beta\Leftrightarrow x\in[\alpha,\beta)$ Σ Λ

7. $x\in(-\infty,\alpha)\Leftrightarrow x>\alpha$ Σ Λ

8. $|x|+|y|+|\omega|=0\Leftrightarrow x=y=\omega=0$ Σ Λ

9. $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{\omega}=0\Leftrightarrow x=y=\omega=0$ Σ Λ

10. $x^2+y^2+\omega^2=0\Leftrightarrow x=y=\omega=0$ Σ Λ

(μον.10)

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε το δειγματικό χώρο $\Omega=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Εστω ακόμη τα ενδεχόμενα:

$A=\{x\in\Omega\,/\,|2|x|-5|>3\}$ και $B=\{x\in\Omega\,/\,|x-5|\le 1\}$

Β1. Να γράψετε τα ενδεχόμενα Α και Β με αναγραφή των στοιχείων τους. **(μον.8)**

Β2. Να δείξετε ότι: $P(A)=\dfrac{1}{2}$ και $P(B)=\dfrac{3}{8}$. **(μον.6)**

Β3. Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιείται μόνο ένα από τα Α και Β. **(μον.5)**

Β4. Να βρείτε την πιθανότητα $P(A'-B')$. **(μον.6)**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta\in R$ ισχύει ότι $|\alpha-2|<1$ και $|\beta-3|\le 2$

1. Να αποδειχθεί ότι $1<\alpha<3$. **(μον.4)**

2. Να αποδειχθεί ότι $1\le\beta\le 5$. **(μον.4)**

3. Να βρεθεί μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha-3\beta$. **(μον.4)**

4. Να βρεθεί μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\dfrac{\alpha}{\beta}$. **(μον.4)**

Γ2. Αν είναι $A=4-\sqrt{5}$ και $B=4+\sqrt{5}$

1. Να αποδείξετε ότι $A\cdot B=11$. **(μον.3)**

2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης A^2+B^2. **(μον.3)**

3. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης A^3+B^3. **(μον.3)**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αν $-1<x<2$ να απλοποιηθεί η παράσταση
$A=5\sqrt{(x-2)^2}-3\sqrt{(x+3)^2}+\sqrt{x^2+4x+4}$ και να βρείτε τις ακέραιες τιμές της. **(μον.5)**

Δ2. Αν $(\alpha-2)^2+|4\alpha-\beta|+\sqrt{\alpha-\beta+2\gamma}=0$ να βρείτε τους α, β, γ. **(μον.2)**

Δ3. Αν α, β θετικοί αριθμοί να αποδείξετε ότι:

1. $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\le 2\cdot\sqrt{\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$ **(μον.3)**

2. $\sqrt{2015}+\sqrt{2016}+\sqrt{2018}+\sqrt{2019}<4\cdot\sqrt{2017}$ **(μον.3)**

Δ4. Θεωρούμε τους θετικούς αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\alpha^3-\beta<\alpha^2\beta-\alpha$.

1. Δείξτε ότι $\alpha<\beta$ **(μον.3)**

2. Δείξτε ότι $\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\dfrac{2\alpha+3\beta}{5}$ **(μον.2)**

3. Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς $\dfrac{\alpha}{\beta}$, $\dfrac{\beta}{\alpha}$, 1 **(μον.2)**

4. Να δείξετε ότι $\alpha+\dfrac{4}{\alpha}\ge 4$ και στη συνέχεια ότι

$\dfrac{(\alpha^2+4)\cdot(\beta^2+4)}{\alpha\cdot\beta}\ge 16$ **(μον.5)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

Α1, Α2 Θεωρία

Α3.

1. $\big||\alpha|-|\beta|\big| \le |\alpha+\beta| \le |\alpha|+|\beta|$

2. $x \in (-\infty,-2]\cup[2,+\infty) \Leftrightarrow |x| \ge 2$

3. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

4. $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

5. $(\alpha-2)^2+(\beta+3)^2+(\gamma-7)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=2$ και $\beta=-3$ και $\gamma=7$

Α4. 1Σ, 2Σ, 3Λ, 4Σ, 5Λ, 6Σ, 7Λ, 8Σ, 9Σ, 10Σ.

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Απ' την ανίσωση

$\big|2|x|-5\big|>3 \Leftrightarrow 2|x|-5<-3$ ή $2|x|-5>3 \Leftrightarrow 2|x|<2$ ή $2|x|>8 \Leftrightarrow$

$|x|<1$ ή $|x|>4$ και επειδή $x\in\Omega$ είναι $x=0,\ 5,\ 6,\ 7$ άρα $A=\{0,5,6,7\}$

Επίσης απ' την ανίσωση $|x-5|\le 1 \Leftrightarrow -1\le x-5\le 1 \Leftrightarrow 4\le x\le 6$ άρα

$x=4,\ 5,\ 6$ οπότε $B=\{4,5,6\}$

Β2.

Είναι: $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$ και $P(B)=\dfrac{N(B)}{N(\Omega)}=\dfrac{3}{8}$

Β3.

Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί ένα μόνο από τα Α και Β είναι το $(A-B)\cup(B-A)=\{0,4,7\}$ γιατί $A-B=\{0,7\}$ και $B-A=\{4\}$.

Η πιθανότητά του είναι: $P((A-B)\cup(B-A))=\dfrac{3}{8}$

Β4.

Είναι $A'=\{1,2,3,4\}$, $B'=\{0,1,2,3,7\}$ οπότε $A'-B'=\{4\}$.

Άρα $P(A'-B')=\dfrac{1}{8}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

1. Απ’ την $|\alpha-2|<1 \Leftrightarrow -1<\alpha-2<1 \Leftrightarrow 1<\alpha<3$.

2. Απ’ την $|\beta-3|\le 2 \Leftrightarrow -2\le\beta-3\le 2 \Leftrightarrow 1\le\beta\le 5$.

3.

$$\left.\begin{matrix}1<\alpha<3\\ 1\le\beta\le 5\end{matrix}\right\}\underset{\cdot(-3)}{\overset{\cdot(2)}{\Rightarrow}}\left.\begin{matrix}2<2\alpha<6\\ -3\ge-3\beta\ge-15\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}2<2\alpha<6\\ -15\le-3\beta\le-3\end{matrix}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}-13<2\alpha-3\beta<3$$

4.

$$\left.\begin{matrix}1<\alpha<3\\ 1\le\beta\le 5\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}1<\alpha<3\\ 1\ge\frac{1}{\beta}\ge\frac{1}{5}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}1<\alpha<3\\ \frac{1}{5}\le\frac{1}{\beta}\le 1\end{matrix}\right\}\overset{(\cdot)}{\Rightarrow}\frac{1}{5}<\frac{\alpha}{\beta}<3$$

Γ2.

1. $A\cdot B=(4-\sqrt{5})\cdot(4+\sqrt{5})=4^2-(\sqrt{5})^2=16-5=11$

2. $A^2+B^2=(A+B)^2-2AB=8^2-2\cdot 11=64-22=42$

3. $A^3+B^3=(A+B)\cdot(A^2+B^2-AB)=8\cdot(42-11)=8\cdot 31=248$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

1.Είναι: $A=5\sqrt{(x-2)^2}-3\sqrt{(x+3)^2}+\sqrt{x^2+4x+4}=$

$=5|x-2|-3|x+3|+\sqrt{(x+2)^2}=5|x-2|-3|x+3|+|x+2|$ **(1)**

Επειδή $-1<x<2\Rightarrow x-2<0,\ x+3>0,\ x+2>0$ και η (1) γίνεται:

$A=5(-x+2)-3(x+3)+(x+2)=-5x+10-3x-9+x+2=-7x+3$

2.Επειδή

$$-1<x<2\overset{(-7)}{\Rightarrow}7>-7x>-14\overset{(+3)}{\Rightarrow}10>-7x+3>-11\Rightarrow-11<A<10$$

Οι ακέραιες τιμές της Α είναι : $-10,-11,\ldots,8,9$

Δ2.

1.Απ' την ισότητα $(\alpha-2)^2+|4\alpha-\beta|+\sqrt{\alpha-\beta+2\gamma}=0$ συμπεραίνουμε ότι $(\alpha-2)^2=0$ και $|4\alpha-\beta|=0$ και $\sqrt{\alpha-\beta+2\gamma}=0 \Leftrightarrow \alpha=2$ και β=8 και γ=3

Δ3.

1.Θα δείξουμε ότι: $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\le 2\sqrt{\dfrac{\alpha+\beta}{2}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2 \le \left(2\sqrt{\dfrac{\alpha+\beta}{2}}\right)^2 \Leftrightarrow$

$(\sqrt{\alpha})^2+2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}+(\sqrt{\beta})^2\le 4\cdot\dfrac{\alpha+\beta}{2} \Leftrightarrow \alpha+2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}+\beta\le 2(\alpha+\beta)\Leftrightarrow$

$\alpha+2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}+\beta\le 2\alpha+2\beta \Leftrightarrow \alpha-2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}+\beta\ge 0\Leftrightarrow$

$(\sqrt{\alpha})^2-2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}+(\sqrt{\beta})^2\ge 0 \Leftrightarrow (\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2\ge 0$ που ισχύει.

2.Σύμφωνα με το 1 είναι $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\le 2\sqrt{\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$ (με το = όταν α=β) άρα:

$\sqrt{2015}+\sqrt{2019}<2\sqrt{\dfrac{2015+2019}{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2015}+\sqrt{2019}<2\sqrt{2017}$ **(1)** και

$\sqrt{2016}+\sqrt{2018}<2\sqrt{\dfrac{2016+2018}{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2016}+\sqrt{2018}<2\sqrt{2017}$ **(2).**

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε:

$\sqrt{2015}+\sqrt{2016}+\sqrt{2018}+\sqrt{2019}<4\sqrt{2017}$

Δ4.

1.Εχουμε:

$\alpha^3-\beta<\alpha^2\beta-\alpha \Leftrightarrow \alpha^3-\alpha^2\beta+\alpha-\beta<0 \Leftrightarrow \alpha^2(\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)<0\Leftrightarrow$

$(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2+1)<0 \Leftrightarrow \alpha-\beta<0\Leftrightarrow \alpha<\beta$.

2.Θα δείξουμε ότι:

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\dfrac{2\alpha+3\beta}{5} \Leftrightarrow 5(\alpha+\beta)<2(2\alpha+3\beta)\Leftrightarrow 5\alpha+5\beta<4\alpha+6\beta \Leftrightarrow \alpha<\beta$

που ισχύει.

3.Αφού $\alpha<\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}<1$ και $\frac{\beta}{\alpha}>1$. Άρα $\frac{\alpha}{\beta}<1<\frac{\beta}{\alpha}$

4.Θα δείξουμε ότι

$\alpha+\frac{4}{\alpha}\geq 4 \overset{\cdot(\alpha>0)}{\Leftrightarrow} \alpha^2+4\geq 4\alpha \Leftrightarrow \alpha^2-4\alpha+4\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-2)^2\geq 0$ που ισχύει.

Έχουμε ότι : $\alpha+\frac{4}{\alpha}\geq 4 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2+4}{\alpha}\geq 4$ **(1)** και επομένως και $\frac{\beta^2+4}{\beta}\geq 4$ **(2)**

Με πολλαπλασιασμό των (1) και (2) κατά μέλη έχουμε ότι

$\frac{(\alpha^2+4)(\beta^2+4)}{\alpha\beta}\geq 16$.