ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

94

Ον/μο:……………….. **Α΄ Λυκείου**

Ύλη:Εξισώσεις-Ανισώσεις-Ακολουθίες-Συναρτήσεις **15-03-15**

Θέμα Α:

Α.1.Να δώσετε τον ορισμό της εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού **(μον.3)**

Α.2.Τί ονομάζουμε τριώνυμο $2^{ου}$ βαθμού; **(μον.4)**

Α.3.Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$

να αποδείξετε ότι: **α)** $x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ **β)** $x_1\cdot x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$ **(μον.8)**

Α.4. Να κυκλώσετε το (Σ) ή το (Λ) στις προτάσεις :

1.Η εξίσωση $x^2-(\alpha+\dfrac{1}{\alpha})x+1=0,$ με $\alpha\neq 0,1$ έχει δύο ρίζες άνισες. **Σ** **Λ**

2.Η ανίσωση $\lambda^2x^2+4\lambda x+5\leq 0,$ με $\lambda\neq 0$ αληθεύει για όλα τα $x\in R$ **Σ** **Λ**

3.Το άθροισμα των ν όρων αριθμητικής προόδου δίνεται απ’ τον τύπο $S_\nu=\dfrac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_\nu)$ **Σ** **Λ**

4.Υπάρχει συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται απ’ τα σημεία Α(1,2) και Β(1,3) **Σ** **Λ**

5.Αν $f(x)>g(x)$ τότε η C_f βρίσκεται κάτω απ’ την C_g **Σ** **Λ**

(μον.10)

Θέμα Β:

Β.1.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x(x^2-12x+35)(x-5)}{|x-5|^2\cdot(3x^2-21x)}$

α)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. **(μον.8)**

β)Να απλοποιήσετε τον τύπο της. **(μον.7)**

Β.2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x^2+x-12}}$ **(μον.7)**

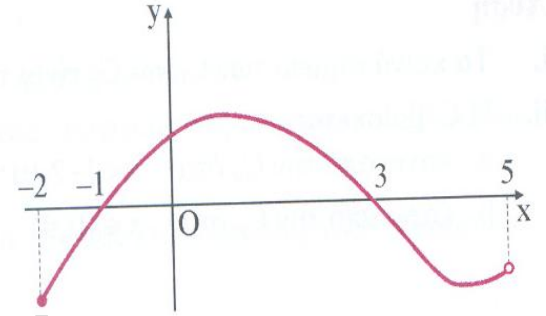
Β3. Στο σχήμα είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Να λυθεί η:

α)εξίσωση $f(x)=0$

β)ανίσωση $f(x)>0$

γ)ανίσωση $f(x)\le 0$ **(μον.3)**



Θέμα Γ:

Γ.1.Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\beta x+\beta^2-4=0$ **(1)**

α)Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες τις $x_1=\beta-2$ και $x_2=\beta+2$. **(μον.5)**

β)Αν x_1,x_2 οι ρίζες της (1) να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1,β,x_2 με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. **(μον.5)**

Γ.2.Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $R-\{-2,1\}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των κ και λ. **(μον.5)**

β)Για κ=1 και λ=-2

i) να απλοποιήσετε τον τύπο της g. **(μον.5)**

ii)αν $-1<\alpha<2$ και -1<β<2 να δείξετε ότι $g(\alpha)\cdot g(\beta)>0$ **(μον.5)**

<u>Θέμα Δ:</u>

Δ.1.Δίνεται η εξίσωση $x^2-2x-\lambda=0,\quad \lambda\in R$. **(1)**

α)Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες. **(μον.3)**

β)Για λ=4 να υπολογίσετε τις παραστάσεις x_1+x_2 και $x_1\cdot x_2$ **(μον.3)**

γ)Για λ=4 να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης
$A=(1+x_1)^{2015}\cdot(1+x_2)^{2015}$ **(μον.3)**

Δ.2. Δίνεται η εξίσωση $x^2-\left(\lambda^2+\lambda\right)x+1=0$. **(1)**

α)Να αποδείξτε ότι $\Delta=(\lambda^2+\lambda+2)\cdot(\lambda^2+\lambda-2)$ **(μον.4)**

β)Να δείξετε ότι αν $-2<\lambda<1$ η (1) είναι αδύνατη. **(μον.4)**

γ)Αν η (1) είναι αδύνατη να υπολογίσετε την παράσταση
$A(\lambda)=|\lambda+2|-2|\lambda-1|+3|\lambda-3|+2006$ **(μον.4)**

δ)Αν η (1) έχει δύο πραγματικές ρίζες x_1,x_2 με $x_1,x_2\in[-2,5]$ να υπολογίσετε το πρόσημο του αριθμού $f(2015)$,
όπου $f(x)=x^2-\left(\lambda^2+\lambda\right)x+1$ **(μον.4)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα Α:

Α.1 Θεωρία **Α.2.** Θεωρία **Α.3.** Θεωρία

Α.4 **1Σ** , **2Λ** , **3Λ** , **4Λ** , **5Λ**

Θέμα Β

Β.1

α)Αν $|x-5|^2\cdot(3x^2-21x)=0$ τότε $|x-5|^2=0$ ή $(3x^2-21x)=0$

άρα $x=5$ ή $3x(x-7)=0 \Leftrightarrow x=5$ ή $x=0$ ή $x=7$

Το πεδίο ορισμού της f λοιπόν είναι το $A=R-\{0,5,7\}$

β) Ο τύπος της f γράφεται: $f(x)=\dfrac{x\cdot(x-5)\cdot(x-7)\cdot(x-5)}{(x-5)^2\cdot 3x\cdot(x-7)}=\dfrac{1}{3}$

Β.2

Πρέπει $\left.\begin{array}{r} x^2-16\geq 0 \\ x^2+x-12>0 \end{array}\right| \overset{\text{ομ}}{\underset{\text{ετ}}{\Leftrightarrow}} \left.\begin{array}{l} x\leq -4 \text{ ή } x\geq 4 \\ x<-4 \text{ ή } x>3 \end{array}\right|$ άρα $A_f=(-\infty,-4)\cup[4,+\infty)$

Β3.

α) $f(x)=0 \Leftrightarrow -1$ ή $x=3$

β) $f(x)>0 \Leftrightarrow -1<x<3$

γ) $f(x)\leq 0 \Leftrightarrow -2\leq x\leq -1$ ή $3\leq x<5$

Θέμα Γ

Γ.1

α)Η (1) έχει $\Delta=(-2\beta)^2-4(\beta^2-4)=16$ και ρίζες

$$x=\frac{2\beta\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\beta\pm 4}{2}$$ άρα $x_1=\beta+2$, $x_2=\beta-2$

β)Οι x_1,β,x_2 είναι οι $\beta-2,\ \beta,\ \beta+2$ για τους οποίους ισχύει

$2\beta=\beta-2+\beta+2$ άρα αποτελούν δ.ο.α.π.

Γ.2

α)Αφού το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $R-\{-2,1\}$ οι αριθμοί -2 και 1 είναι ρίζες του παρονομαστή. Αρα θα ισχύει:

$$\left.\begin{matrix}(-2)^2+\kappa(-2)+\lambda=0\\ 1^2+\kappa\cdot 1+\lambda=0\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}-2\kappa+\lambda=-4\\ \kappa+\lambda=-1\end{matrix}\right| \overset{(-)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{matrix}\kappa=1\\ \lambda=-2\end{matrix}\right|$$

β)

i) Η g γράφεται:

$$g(x)=\frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+x-2}=\frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)}=(x+1)(x-2)$$

ii)Επειδή $g(x)=(x+1)(x-2)=x^2+3x+2$**,** δηλ**.** τριώνυμο και $-1<\alpha<2,\ -1<\beta<2$, δηλ. τα α και β είναι μεταξύ των ριζών της g, οι αριθμοί g(α) και g(β) είναι ετερόσημοι ου 1 δηλ. αρνητικοί.
Αρα είναι και $g(\alpha)\cdot g(\beta)>0$**.**

<u>Θέμα Δ</u>

Δ.1

α)Η (1) έχει $\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-\lambda)=4+4\lambda=4(1+\lambda)$
Για να έχει άνισες ρίζες πρέπει Δ>0 δηλ.4(λ+1)>0 δηλ. λ+1>0δηλ.λ>– 1

β)Για λ=4 η (1) γράφεται: $x^2-2x-4=0$ και σύμφωνα με τους τύπους Vieta θα είναι: $x_1+x_2=-\dfrac{-2}{1}=2$ και $x_1\cdot x_2=\dfrac{-4}{1}=-4$

γ)Είναι: $A=[(1+x_1)\cdot(1+x_2)]^{2015}=(1+x_2+x_1+x_1\cdot x_2)\overset{(\beta)}{=}(1+2-4)^{2015}=$

$=(-1)^{2015}=-1$

Δ.2

α)Είναι: $\Delta=[-(\lambda^2+\lambda)]^2-4\cdot 1\cdot 1=(\lambda^2+\lambda)^2-2^2=(\lambda^2+\lambda+2)(\lambda^2+\lambda-2)$

β)Το τριώνυμο $\lambda^2+\lambda+2$ έχει διακρίνουσα $\Delta_1=1-8=-7<0$ άρα είναι πάντα θετικό.
Το τριώνυμο $\lambda^2+\lambda-2$ έχει ρίζες 1 και -2 και επειδή -2<λ<1 είναι αρνητικό.
Αρα Δ=$(\lambda^2+\lambda+2)(\lambda^2+\lambda-2)$<0 και η (1) είναι αδύνατη.

γ)Αφού η (1) είναι αδύνατη, είναι $-2<\lambda<1$ οπότε $\lambda+2.0$,$\lambda-1<0$ και $\lambda-3<0$
η παράσταση γράφεται: $A(\lambda)=|\lambda+2|-2|\lambda-1|+3|\lambda-3|+2006=$
$=(\lambda+2)-2(-\lambda+1)+3(-\lambda+3)+2006=\lambda+2+2\lambda-2-3\lambda+9+2006=$
$=2015$.

δ)Ο αριθμός 2015 είναι έξω απ’ το διάστημα των ριζών
$x_1,\ x_2$ αφού $x_1,x_2\in[-2,5]$.Αρα ο αριθμός f(2015) είναι ομόσημος
του α=1 δηλ. f(2015)>0