

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

93

Α' Λυκείου

11-01-15

Όν/μο:.....

Ύλη: Πιθανότητες – Το σύνολο **R** – Εξισώσεις

Θέμα 1^ο:

A.1. Να δώσετε τον ορισμό της εξίσωσης 2^{ου} βαθμού **(μον.3)**

A.2. Αν x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$, να αποδείξετε ότι και η εξίσωση $x^2 - Sx + P = 0$ έχει τις ίδιες ρίζες. **(μον.6)**

A.3. Να αποδείξετε ότι $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$. Πότε ισχύει το =; **(μον.6)**

A.4. Να κυκλώσετε το (Σ) ή το (Λ) στις προτάσεις :

1. Αν $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ τότε

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

Σ Λ

2. Για τα ενδεχόμενα A και B ισχύει η ισότητα:

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cap B') \cup (B \cap A')$$

Σ Λ

3. Αν $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 0$ τότε $x=2$ και $y=-1$

Σ Λ

4. $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$ και $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \leq 0$

Σ Λ

5. Αν $2 < x < 5$ τότε $|x - 2| + |x - 5| = 3$

Σ Λ

6. $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = 2 + \sqrt{5}$

Σ Λ

7. Η εξίσωση $ax^2 + 2x - a = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Σ Λ

8. Οι εξισώσεις $\frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1} = 5$ και

$$(2x^2 + 3x + 1) = 5(x^2 - 1)$$

Σ Λ

9. Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x και y που έχουν άθροισμα $S=2$ και γινόμενο $P=2$

Σ Λ

10. Η εξίσωση $x^2 - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)x + 1 = 0$, με $\alpha \neq 0, 1$

έχει δύο ρίζες άνισες και αντίστροφες.

Σ Λ
(μον.10)

Θέμα 2^ο:

B.1. Στην εξίσωση $ax^2 - 4x + 1 = 0$, το a καθορίζεται από τη ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού. Να βρείτε την πιθανότητα η εξίσωση να είναι αδύνατη. (μον.8)

B.2. Θεωρούμε την εξίσωση $\left|P(A) - \frac{3}{4}\right| + \sqrt{P(B) - \frac{1}{2}} = 0$

όπου $P(A)$, $P(B)$ οι πιθανότητες πραγματοποίησης δύο ενδεχομένων του ίδιου δειγματικού χώρου Ω .

α) Να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα. (μον.9)

β) Αν $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$, να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A ή το B . (μον.8)

Θέμα 3^ο:

Γ.1. Να αποδείξετε ότι :

α) $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y}$, $x, y \geq 0$

β) $\frac{x+1}{2} \geq \sqrt{x}$, $x \geq 0$

γ) $(x+1)(y+1)(z+1) \geq 8\sqrt{xyz}$, $x, y, z \geq 0$ **δ)** $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$

(μον.10)

Γ.2. Αν η εξίσωση $(\lambda^2 + \lambda) \cdot x = \lambda^2 + 3\lambda + 2$ έχει άπειρες λύσεις να αποδείξετε ότι η $(\lambda^{2014} - 1) \cdot x = \lambda^{2017} - 1$ είναι αδύνατη. (μον.4)

Γ.3. Να λυθεί η εξίσωση $|2x + 3| \cdot |3 - 2x| = 16$ (μον.4)

Γ.4. Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής την παράσταση $\left|x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right|$. (μον.4)

Γ.5. Αν ο μ^2 είναι άρτιος φυσικός αριθμός, τότε να αποδείξετε ότι ο μ είναι άρτιος ακέραιος. (μον.3)

Θέμα 4^ο:

Δ.1. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2} \cdot x^2 - (\sqrt{5} + \sqrt{2}) \cdot x + \sqrt{5} = 0$ (μον.4)

Δ.2. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (2v+1)x + v^2 + v = 0$, $v \in \mathbb{N}^*$.

Αποδείξτε ότι :

α) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες, η μία άρτια και η άλλη περιττή. (μον.4)

β) $(x_1 - x_2)^{2014} = 1$ (μον.1)

Δ.3. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \cdot \gamma \neq 0$.

Αν $|\alpha - \gamma| = |\alpha| + |\gamma|$ να δείξετε ότι η εξίσωση έχει άνισες ρίζες.

(μον.4)

Δ.4. Αν η εξίσωση $x^2 - \lambda x + |\lambda| - 2 = 0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες,

τις x_1 και x_2 τότε :

α) Να βρείτε τις τιμές του λ .

(μον.3)

β) Για $\lambda = -1$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

i) $x_1^2 + x_2^2$ **ii)** $|x_1 - x_2|$ **iii)** $|x_1^3 - x_2^3|$

(μον.9)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1^ο:

A.1. Θεωρία **A.2.** Θεωρία **A.3.** Θεωρία

A.4. 1Σ , 2Σ , 3Σ , 4Λ , 5Σ , 6Σ , 7Λ , 8Λ , 9Λ , 10Σ

Θέμα 2^ο

B.1. Έχουμε το $\alpha \in \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Η εξίσωση είναι 2^{ου} βαθμού γιατί $\alpha \neq 0$ και είναι αδύνατη όταν $\Delta < 0$ δηλ. $16 - 4\alpha < 0 \Leftrightarrow 4\alpha > 16 \Leftrightarrow \alpha > 4$
 άρα $\alpha = 5$ ή $\alpha = 6$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$

B.2.α) Από την εξίσωση $\left| P(A) - \frac{3}{4} \right| + \sqrt{P(B) - \frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow$

$$P(A) - \frac{3}{4} = 0 \text{ και } P(B) - \frac{1}{2} = 0 \text{ άρα } P(A) = \frac{3}{4} \text{ και } P(B) = \frac{1}{2} .$$

Έστω A και B ασυμβίβαστα . Τότε από την ισότητα

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3+2}{4} = \frac{5}{4} > 1 ,$$

άτοπο . Άρα τα ενδεχόμενα A και B είναι **συμβιβαστά** .

β) Το ενδεχόμενο « να πραγματοποιηθεί το A ή το B » είναι το $A \cup B$. Ξέρουμε ότι $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,

$$\text{άρα } P(A \cup B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{6+4-3}{8} = \boxed{\frac{7}{8}}$$

Θέμα 3^ο

Γ.1. α) Θ.δ.ο $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Leftrightarrow x+y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow \sqrt{x}^2 + \sqrt{y}^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} \geq 0$
 $\Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$, που ισχύει

β) Η σχέση του α) ερωτήματος, για $y=1$ δίνει $\frac{x+1}{2} \geq \sqrt{x}$

γ) Σύμφωνα με το β) ερώτημα έχουμε :

$$\left. \begin{array}{l} x+1 \geq 2\sqrt{x} \\ y+1 \geq 2\sqrt{y} \\ z+1 \geq 2\sqrt{z} \end{array} \right\} \stackrel{(*)}{\Rightarrow} (x+1)(y+1)(z+1) \geq 8\sqrt{xyz}$$

δ) Από το β) έχουμε ότι $\frac{x+1}{\sqrt{x}} \geq 2$.

Για $x \rightarrow x^2+1$ έχουμε $\frac{(x^2+1)+1}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$ δηλ $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$

Γ.2. Αφού η εξίσωση $(\lambda^2 + \lambda) \cdot x = \lambda^2 + 3\lambda + 2$ έχει άπειρες λύσεις

θα είναι $\lambda^2 + \lambda = 0$ και $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ή } \lambda = -1)$ και $(\lambda = -1 \text{ ή } \lambda = -2)$ άρα $\lambda = -1$.

Για $\lambda = -1$ η δεύτερη εξίσωση έχει:

$\alpha = (-1)^{2014} - 1 = 0$ και $\beta = (-1)^{2017} - 1 = -2 \neq 0$ οπότε είναι αδύνατη.

Γ.3. Η εξίσωση $|2x+3| \cdot |3-2x| = 16$ γράφεται ισοδύναμα :

$$|2x+3| \cdot |2x-3| = 16 \Leftrightarrow |(2x+3) \cdot (2x-3)| = 16 \Leftrightarrow$$

$$|(2x)^2 - 3^2| = 16 \Leftrightarrow |4x^2 - 9| = 16 \Leftrightarrow 4x^2 - 9 = 16 \text{ ή } 4x^2 - 9 = -16 \Leftrightarrow$$

$$4x^2 = 25 \text{ ή } \underbrace{4x^2 = -7}_{\text{αδύνατη}} \text{ άρα } x^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \boxed{x = \pm \frac{5}{2}}$$

Γ.4. Έχουμε : $x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \geq 0$

Άρα $\left|x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right| = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$

Γ.5. Έστω ότι ο μ δεν είναι άρτιος ακέραιος δηλ. έστω είναι περιττός.

Τότε : $\mu = 2\kappa + 1, \kappa \in \mathbb{Z} \Rightarrow \mu^2 = (2\kappa + 1)^2 = 4\kappa^2 + 4\kappa + 1 =$
 $= 2(\underbrace{2\kappa^2 + 2\kappa}_{\lambda \in \mathbb{Z}}) + 1 = 2\lambda + 1$, δηλ. μ^2 περιττός ακέραιος .

Αυτό είναι άτοπο . Άρα ο μ είναι άρτιος .

Θέμα 4^ο

Δ.1. Η εξίσωση έχει $\Delta = \left[-(\sqrt{5} + \sqrt{2})\right]^2 - 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} =$
 $= \sqrt{5}^2 + 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2}^2 - 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5}^2 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{2}^2 =$
 $= (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 > 0$ και ρίζες

$x_{1,2} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2} \pm \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2} \pm (\sqrt{5} - \sqrt{2})}{2\sqrt{2}}$ άρα :

$x_1 = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

$x_2 = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$

2^{ος} Τρόπος: Διαιρώ τα μέλη της εξίσωσης με $\sqrt{2}$ και έχω:

$x^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} + 1\right)x + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = 0$ και σύμφωνα με τους τύπους Vieta

οι ρίζες είναι οι $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ και 1.

Δ.2. α) Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = [-(2v+1)]^2 - 4(v^2 + v) =$
 $= 4v^2 + 4v + 1 - 4v^2 - 4v = 1$ και ρίζες :

$$x_{1,2} = \frac{2v+1 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{2v+1 \pm 1}{2} \text{ άρα } x_1 = \frac{2v+2}{2} = \frac{2(v+1)}{2}$$

$$\text{δηλ } x_1 = v+1 \text{ και } x_2 = \frac{2v+1-1}{2} = \frac{2v}{2} \text{ δηλ } x_2 = v.$$

Οι ρίζες είναι διαδοχικοί φυσικοί, επομένως η μία άρτιος και η άλλη περιττός αριθμός.

$$\beta) (x_1 - x_2)^{2014} = (v+1 - v)^{2014} = 1^{2014} = 1$$

Δ.3. Αφού $\alpha \cdot \gamma \neq 0$ είναι α και $\gamma \neq 0$ οπότε η εξίσωση είναι $2^{\text{ου}}$ βαθμού. Από την ισότητα $|\alpha - \gamma| = |\alpha| + |\gamma|$ έχουμε ότι και $|\alpha + (-\gamma)| = |\alpha| + |-\gamma|$ άρα α και $-\gamma$ ομόσημοι οπότε οι α, γ είναι ετερόσημοι. Άρα η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει δύο άνισες ρίζες.

Δ.4. α) Αφού η εξίσωση έχει ετερόσημες ρίζες θα είναι $P < 0$ δηλ
 $|\lambda| - 2 < 0 \Leftrightarrow |\lambda| < 2 \Leftrightarrow -2 < \lambda < 2$

β) Για $\lambda = -1$ η εξίσωση γίνεται $x^2 + x - 1 = 0$ και έχει
 $S = x_1 + x_2 = -1$ και $P = x_1 x_2 = -1$.

Έχουμε λοιπόν :

$$\text{i) } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) = 3$$

$$\text{ii) } |x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 \stackrel{(i)}{=} 3 - 2 \cdot (-1) = 5$$

$$\text{άρα } |x_1 - x_2| = \sqrt{5}$$

$$\text{iii) } |x_1^3 - x_2^3| = |(x_1 - x_2) \cdot (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)| =$$

$$= |x_1 - x_2| \cdot |(x_1^2 + x_2^2) + x_1 x_2| \stackrel{(ii)}{=} \sqrt{5} \cdot |3 + (-1)| \stackrel{(i)}{=} 2\sqrt{5}$$