ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

92

Ονοματεπώνυμο: ……………………………….. **Α΄ Λυκείου**
΄Υλη :Δυνάμεις-Ταυτότητες-Παραγοντοποίηση **2-11-2014**

ΘΕΜΑ Α

Α1.
1. Να γράψετε τα σύνολα των αριθμών που γνωρίζετε.
2. Πότε δύο αριθμοί λέγονται αντίθετοι ;
3. Ποιος είναι ο αντίστροφος του $\frac{\alpha}{\beta}$, $\alpha,\beta \neq 0$, ποιος ο αντίστροφος του 1, του -1 και του 0; **(μον.6)**

Α2. Να συμπληρώσετε τα κενά **:**

1. $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$ = ………………..
2. $\alpha^3-\beta^3$ =………………………
3. $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$ =………………
4. $(\alpha+\beta)^3$ =……………..
5. $\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$ =…………
6. $(\alpha+\beta)^2$ =……………………
7. $(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$ =…………
8. $(\alpha-\beta+\gamma)^2$ =…………………
9. $(-\alpha+\beta)^2$ =……………………
10. $(-\alpha-\beta)^3$ =……………………

(μον.10)

Α3.
Να κυκλώσετε το Σ ή το Λ στις προτάσεις:

1. $\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma$ **Σ Λ**
2. $\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot ...\cdot\alpha_\kappa=0 \Leftrightarrow \alpha_1=0$ ή $\alpha_2=0$ ή ... ή $\alpha_\kappa=0$ **Σ Λ**
3. $\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot ...\cdot\alpha_\kappa\neq 0 \Leftrightarrow \alpha_1\neq 0$ και $\alpha_2\neq 0$ και...και $\alpha_\kappa\neq 0$ **Σ Λ**
4. Αν $\alpha^\kappa=\beta^\kappa$ τότε $\alpha=\beta$, κ ακέραιος . **Σ Λ**

5. Ο αριθμός 0 έχει αντίστροφο. **Σ Λ**

6. Αν $\alpha \neq \beta$ και $\gamma \neq \delta$ τότε $\alpha+\gamma \neq \beta+\delta$ **Σ Λ**

7. $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\gamma}{\delta}=\alpha\cdot\delta+\beta\cdot\gamma$ **Σ Λ**

8. Οι ακέραιοι αριθμοί α, $\alpha+1$, $\alpha+2$ είναι διαδοχικοί. **Σ Λ**

9.Αν $\alpha^2+\beta^2=0$ τότε $\alpha=\beta=0$. **Σ Λ**

(μον.9)

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1.

Βρείτε την τιμή της παράστασης:

$\left[\left(x^2y^3\right)^{-2}\cdot\left(xy^3\right)^4\right]:(x^3:y^{-1})^{-3}$ για $x=1990$ και $y=\dfrac{1}{1990}$. **(μον.5)**

Β2.

Αν $x+y=10$, $x\cdot y=21$ βρείτε το x^2+y^2 χωρίς να βρείτε τους αριθμούς x και y. **(μον.4)**

Β3.

Αν x-y=3 να υπολογίσετε την παράσταση :

$\Pi=3x-3y-x^2-y^2+2xy$ **(μον.4)**

Β4. Να γίνουν οι πράξεις $K=\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{4xy}{y^2-x^2}$ **(μον.4)**

Β5. Να απλοποιηθεί το κλάσμα $M=\dfrac{(x^2-4)^2-(x+2)^2}{x^2-4x+3}$ **(μον.4)**

Β6.Να δείξετε ότι :

$(\alpha+\beta)^3-3(\alpha+\beta)^2\cdot(\alpha-\beta)+3(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)^2-(\alpha-\beta)^3=8\beta^3$ **(μον.4)**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

1.Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ να αποδείξετε ότι: $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$ **(μον.5)**

2.Αν $x=\alpha^3+3\alpha\beta\gamma$, $y=\beta^3+3\alpha\beta\gamma$, $z=\gamma^3+3\alpha\beta\gamma$ και $\alpha+\beta+\gamma=0$ να βρείτε το x+y+z. **(μον.4)**

3.Να γίνει γινόμενο παραγόντων η παράσταση
$K=(x-2y)^3+(\omega-2x)^3+(2y-\omega+x)^3$. **(μον.5)**

Γ2.

Αν α, β, γ, δ με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί , να δείξετε ότι:

1. βγ-αδ=2 **(μον.3)**

2. βδ-αγ περιττός **(μον.4)**

3. α+β+γ+δ άρτιος αλλά όχι πολ/σιο του 4. **(μον.4)**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Δίνονται οι μη μηδενικοί αριθμοί α, β με $\alpha\neq\beta$ για τους οποίους ισχύει $\dfrac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}=\dfrac{\alpha}{\beta}$.

1. Να δείξετε ότι οι α, β είναι αντίστροφοι. **(μον.4)**

2.Βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $K=\dfrac{\alpha^{22}\cdot(\beta^3)^8}{\alpha^{-2}\cdot(\alpha\beta)^{25}}$. **(μον.4)**

Δ2.

Εστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει $\dfrac{4x+5y}{x-4y}=-2$ **(μον.4)**

1. Να αποδείξετε ότι y=2x.

2.Βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $A=\dfrac{2x^2+2y^2+xy}{xy}$ **(μον.4)**

Δ3.

Αν $x^2+y^2-2x+6y+10=0$ να βρείτε τους x, y. **(μον.4)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

Α1

1. Τα σύνολα των αριθμών είναι:

1. ΦΥΣΙΚΟΙ : $N = \{0, 1, 2, 3, ...\}$, $N^* = \{1, 2, 3, ...\}$.

2. ΑΚΕΡΑΙΟΙ : $Z = \{..... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$, $Z^* = Z - \{0\}$.

3. ΡΗΤΟΙ : $Q = \{ x = \frac{\alpha}{\beta},\ \alpha \in Z,\ \beta \in Z^* \}$ **.**

4. ΑΡΡΗΤΟΙ: Q' **= {**όλοι οι δεκαδικοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία μη περιοδικά }

5. ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ : $R = Q \cup Q'$.

2. Δύο αριθμοί λέγονται αντίθετοι όταν έχουν άθροισμα μηδέν δηλ.
α, β αντίθετοι $\Leftrightarrow \alpha + \beta = 0$

3. ● Ο αντίστροφος του $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι ο $\frac{\beta}{\alpha}$.

● Ο αντίστροφος του 1 είναι ο 1.
● Ο αντίστροφος του -1 είναι ο -1.
● Ο μηδέν δεν έχει αντιστροφο.

Α2.

1. α^2-$2\alpha\beta$+β^2 = $(\alpha$-$\beta)^2$
2. α^3-β^3 =$(\alpha$-$\beta)(\alpha^2$+$\alpha\beta$+$\beta^2)$
3. $(\alpha$-$\beta).(\alpha$+$\beta)$ =α^2-β^2
4. $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$
5. $\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3 =(\alpha-\beta)^3$
6. $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$
7. $(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) = \alpha^3+\beta^3$
8. $(\alpha-\beta+\gamma)^2 =\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma+2\alpha\gamma$
9. $(-\alpha+\beta)^2 =(\alpha-\beta)^2= \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$
10. $(-\alpha-\beta)^3 =-(\alpha+\beta)^3$

Α3. 1Λ , 2Σ, 3Σ, 4Λ, 5Λ, 6Λ, 7Λ, 8Σ, 9Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Η δοθείσα παράσταση γράφεται: $\left[\left(x^2y^3\right)^{-2}\cdot\left(xy^3\right)^4\right]:(x^3:y^{-1})^{-3}=$

$\left[\left(x^{-4}y^{-6}\right)\cdot\left(x^4y^{12}\right)\right]:(x^{-9}:y^3)=x^0y^6:\dfrac{x^{-9}}{y^3}=1\cdot y^6\cdot\dfrac{y^3}{x^{-9}}=x^9\cdot y^9=(xy)^9=$

$=(1990\cdot\dfrac{1}{1990})=1.$

Β2.

Εχουμε: $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=10^2-2\cdot 21=58$

Β3.

Είναι: $\Pi=3x-3y-x^2-y^2+2xy=$

$=3(x-y)-(x^2+y^2-2xy)=3(x-y)-(x-y)^2=3\cdot 3-3^2=0$

Β4.

Εχουμε: $K=\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{4xy}{y^2-x^2}=\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{4xy}{x^2-y^2}=$

$=\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{4xy}{(x-y)(x+y)}=\dfrac{(x+y)^2+(x-y)^2-4xy}{(x-y)\cdot(x+y)}$

$=\dfrac{x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2-4xy}{(x-y)\cdot(x+y)}=\dfrac{2x^2+2y^2}{x^2-y^2}=\dfrac{2(x^2+y^2)}{x^2-y^2}$

Β5.

Το κλάσμα γράφεται: $M=\dfrac{(x^2-4)^2-(x+2)^2}{x^2-4x+3}=\dfrac{(x-2)^2\cdot(x+2)^2-(x+2)^2}{(x-1)\cdot(x-3)}$

$=\dfrac{(x+2)^2\cdot[(x-2)^2-1]}{(x-1)\cdot(x-3)}=\dfrac{(x+2)^2\cdot(x-2+1)\cdot(x-2-1)}{(x-1)\cdot(x-3)}=$

$=\dfrac{(x+2)^2\cdot(x-1)\cdot(x-3)}{(x-1)\cdot(x-3)}=(x+2)^2$ **,** $x\neq 1,3$

Β6.

Εχουμε: $(\alpha+\beta)^3-3(\alpha+\beta)^2\cdot(\alpha-\beta)+3(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)^2-(\alpha-\beta)^3=$

$=[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]^3=(2\alpha)^3=8\alpha^3$**.**

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1.

1. Απ΄ την $\alpha+\beta+\gamma=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta=-\gamma \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^3=(-\gamma)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=-\gamma^3 \Leftrightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \Leftrightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-3\alpha\beta(-\gamma) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$**.**

2.Είναι:

$$x+y+z=\alpha^3+3\alpha\beta\gamma+\beta^3+3\alpha\beta\gamma+\gamma^3+3\alpha\beta\gamma=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+9\alpha\beta\gamma\overset{(1)}{=}$$
$$=3\alpha\beta\gamma+9\alpha\beta\gamma=12\alpha\beta\gamma.$$

3.Επειδή $(x-2y)+(\omega-2x)+(2y-\omega+x)=0$ σύμφωνα με το **(1)** ερώτημα είναι και $K=(x-2y)^3+(\omega-2x)^3+(2y-\omega+x)^3=$
$=3(x-2y)(\omega-2x)(2y-\omega+x)$.

Γ2.

Αφού οι α, β, γ είναι διαδοχικοί αριθμοί, θα γράφονται στη μορφή $\alpha,\ \alpha+1,\ \alpha+2,\ \alpha+3$.Εχουμε λοιπόν:

1.$\beta\gamma-\alpha\delta=(\alpha+1)(\alpha+2)-\alpha(\alpha+3)=\alpha^2+2\alpha+\alpha+2-\alpha^2-3\alpha$ =2

2.$\beta\delta-\alpha\gamma=(\alpha+1)(\alpha+3)-\alpha(\alpha+2)=\alpha^2+3\alpha+\alpha+3-\alpha^2-2\alpha=$

$=2\alpha+3=(2\alpha+2)+1=2(\alpha+1)+1\overset{\alpha+1=\mu}{=\!=\!=\!=}2\mu+1$, άρα περιττός.

3.$\alpha+\beta+\gamma+\delta=\alpha+\alpha+1+\alpha+2+\alpha+3=4\alpha+6=(4\alpha+4)+2=$

$=4(\alpha+1)+2\overset{\alpha+1=\lambda}{=\!=\!=}4\lambda+2$ που είναι άρτιος αλλά όχι πολλαπλάσιο του 4, γιατί 2<4.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.

1. Απ’ την ισότητα $\dfrac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ προκύπτει:

$$(\alpha^2+1)\cdot\beta=(\beta^2+1)\cdot\alpha \Leftrightarrow \alpha^2\beta+\beta=\beta^2\alpha+\alpha \Leftrightarrow \underline{\alpha^2\beta}+\underline{\underline{\beta}}-\underline{\beta^2\alpha}-\underline{\underline{\alpha}}=0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha\beta(\alpha-\beta)-(\alpha-\beta)=0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)(\alpha\beta-1)=0 \overset{\alpha\neq\beta}{\Leftrightarrow} \alpha\beta-1=0 \Leftrightarrow \alpha\beta=1$$

άρα α, β αντίστροφοι.

2.Εχουμε:

$$K=\frac{\alpha^{22}\cdot\beta^{24}}{\alpha^{-2}\cdot\alpha^{25}\beta^{25}}=\alpha^{22-(-2)-25}\cdot\beta^{24-25}=\alpha^{-1}\cdot\beta^{-1}=(\alpha\beta)^{-1}=(1)^{-1}=1.$$

Δ2.

1.Απ’ την σχέση $\dfrac{4x+5y}{x-4y}=-2$ προκύπτει:

$$4x+5y=-2(x-4y) \Leftrightarrow 4x+5y=-2x+8y \Leftrightarrow 4x+2x=8y-5y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x=3y \Leftrightarrow y=2x.$$

2.Η παράσταση $A=\dfrac{2x^2+2y^2+xy}{xy}$ γράφεται:

$$A=\frac{2x^2+2(2x)^2+x\cdot 2x}{x\cdot 2x}=\frac{2x^2+2\cdot 4x^2+2x^2}{2x^2}=\frac{12x^2}{2x^2}=6.$$

Δ3.Απ’ την $x^2+y^2-2x+6y+10=0$

$\Leftrightarrow (x^2-2x+1)+(y^2+6y+9)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=0$ άρα

$x-1=0$ και $y-3=0 \Leftrightarrow x=1$ και $y=3$.