ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

90

Ον/μο:……………….. **Α΄ Λυκείου**

Ύλη: Ανισώσεις-Ακολουθίες **16-03-14**

Θέμα 1ο:

Α.1. Να δώσετε τον ορισμό του τριωνύμου 2ου βαθμού **(μον.3)**

Α.2. Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο μετασχηματίζεται στη μορφή $f(x)=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha^2}\right]$ **(μον.4)**

Α.3. Να αποδείξετε ότι αν Δ>0 το τριώνυμο γράφεται $f(x)=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ όπου ρ_1 , ρ_2 οι ρίζες του . **(μον.4)**

Α.4. Να αποδείξετε ότι , όταν Δ>0 , το τριώνυμο είναι:
- Ετερόσημο του α για τις τιμές του x που βρίσκονται μεταξύ των ριζών .
- Ομόσημο του α για τις τιμές του x που βρίσκονται εκτός των ριζών . **(μον.4)**

Α.5. Να κυκλώσετε το (Σ) ή το (Λ) στις προτάσεις :

1. Η ακολουθία $\alpha_\nu=3\nu+5$ είναι αριθμητική πρόοδος. **Σ Λ**

2. Αν οι α , β , γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου τότε ο β είναι ο γεωμετρικός μέσος των α , β, γ . **Σ Λ**

3. Έστω (α_ν) γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ. Οι αριθμοί $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5,....,\alpha_{2\mu+1}$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο λ^2 . **Σ Λ**

4. Έστω (α_ν **)** αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω. Οι αριθμοί $\alpha_1,\alpha_4,\alpha_7,......$ δημιουργούν μια νέα αριθμητική πρόοδο με διαφορά 2ω **.** **Σ Λ**

5. Σε μια αριθμητική πρόοδο με 10 όρους ο 4ος όρος από το τέλος είναι ο α_7 **Σ Λ**

(μον.10)

www.efklidis.edu.gr Τρίκαλα τηλ.-fax(24310-36733)

<u>Θέμα 2ο:</u>

Α.1. Να βρείτε τους αριθμούς $\alpha \in \mathbb{R}$, για τους οποίους η λύση της εξίσωσης $\frac{3x+2}{7} - x = \frac{x}{2} + 1$ είναι λύση και της ανίσωσης $\frac{3}{2}(x-\alpha) \le \frac{2x+\alpha}{4}$. **(μον.5)**

Α.2. Να λυθεί η ανίσωση $\left(\lambda^2+\lambda+1\right)\cdot x > \lambda^3 - 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ **(μον.5)**

Α.3. Να λυθεί η ανίσωση $\left|\frac{x}{|x|+1}\right| < \frac{1}{2}$ **(μον.5)**

Α.4. Να λυθεί η ανίσωση $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$ **(μον.5)**

Α.5. Αν το τριώνυμο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + 2013, \quad \alpha \neq 0$ είναι διαφορετικό του μηδενός για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι $f(2014) > 0$ **(μον.5)**

<u>Θέμα 3ο:</u>

Α. Αν $-x^3 + k$, $x^2 + 3 + k$, -3x+k με τη σειρά που δίνονται είναι τρεις πρώτοι όροι αριθμητικής προόδου και έχουν άθροισμα 27 , τότε :

Α1. Να αποδείξετε ότι x=-2 **(μον.5)**

Α2. Να βρείτε τον αριθμό κ **(μον.5)**

Α3. Να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της προόδου. **(μον.5)**

Α4. Να υπολογίσετε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου . **(μον.5)**

Β. Να βρείτε τον α_{21} μιας γεωμετρικής προόδου με $\alpha_{13} = \sqrt{2}$ και $\alpha_{23} = 32\sqrt{2}$ **(μον.5)**

Θέμα 4ο:

Α. Η τιμή αγοράς ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή είναι μεγαλύτερη από 620€ και μικρότερη από 640€ .Κατά την αγορά συμφωνήθηκαν τα εξής :

- Να δοθεί προκαταβολή 120€ .
- Η εξόφληση του υπόλοιπου ποσού να γίνει σε 10 μηνιαίες δόσεις .
- Κάθε δόση να είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη κατά ω € , όπου ω θετικός ακέραιος .
- Η τέταρτη δόση να είναι 48€ .

Α.1. Να βρείτε την τιμή του ω . **(μον.5)**
Α.2. Να βρείτε το ποσό της τελευταίας δόσης , αν ω=2 . **(μον.5)**
Α.3. Να βρείτε την τιμή της αγοράς του υπολογιστή . **(μον.5)**

Β.
Β1. Να βρείτε για ποιες τιμές ορίζεται η παράσταση

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{\left|x^2-2x+2\right|-10}}{\sqrt{-x^2+9x}}$$ **(μον.5)**

Β2. Αν η $\alpha_1=4$ είναι η μικρότερη τιμή για την οποία ορίζεται η παράσταση f(x), είναι ο πρώτος όρος μιας γεωμετρικής προόδου και $\lambda=\sqrt{\alpha_1}$ ο λόγος της να βρείτε ποιος όρος της προόδου δεν υπερβαίνει τον 1024 .

(μον.5)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1ο:

Α.1. Θεωρία **Α.2.** Θεωρία **Α.3.** Θεωρία **Α.4** Θεωρία

Α.5. 1Σ , 2Λ , 3Σ , 4Λ , 5Σ

Θέμα 2ο

Α.1. • Η εξίσωση $\frac{3x+2}{7}-x=\frac{x}{2}+1 \overset{\cdot(14)}{\Leftrightarrow} 2(3x+2)-14x=7x+14 \Leftrightarrow$

$6x+4-14x=7x+14 \Leftrightarrow 6x-14x-7x=14-4 \Leftrightarrow$

$-15x=10 \Leftrightarrow x=-\frac{10}{15} \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$

• Η ανίσωση $\frac{3}{2}(x-\alpha)\le\frac{2x+\alpha}{4} \overset{\cdot(4)}{\Leftrightarrow} 6(x-\alpha)\le 2x+\alpha \Leftrightarrow$

$6x-6\alpha\le 2x+\alpha \Leftrightarrow 6x-2x\le 6\alpha+\alpha \Leftrightarrow 4x\le 7\alpha \Leftrightarrow$

$x\le\frac{7\alpha}{4}$ ή $x\in\left(-\infty,\frac{7\alpha}{4}\right]$.

Η λύση $x=-\frac{2}{3}$ της εξίσωσης είναι και λύση της ανίσωσης

αν $-\frac{2}{3}\le\frac{7\alpha}{4} \overset{\cdot(12)}{\Leftrightarrow} 21\alpha\ge -8 \Leftrightarrow \alpha\ge-\frac{8}{21}$

Α.2. Το τριώνυμο $\lambda^2+\lambda+1$ έχει $\Delta=1^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$ άρα είναι θετικό για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Η ανίσωση $\left(\lambda^2+\lambda+1\right)x>\lambda^3-1$ γράφεται ισοδύναμα:

$$x>\frac{(\lambda-1)\left(\lambda^2+\lambda+1\right)}{\lambda^2+\lambda+1} \Leftrightarrow x>\lambda-1$$

Α.3. Η ανίσωση $\left|\frac{x}{|x|+1}\right|<\frac{1}{2}$ ισοδύναμα γράφεται :

$$\frac{|x|}{\left||x|+1\right|}<\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|x|}{|x|+1}<\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2|x|<|x|+1 \Leftrightarrow |x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$$

Α.4. Θέτουμε $x^2 = y$ και η ανίσωση $x^4 - 5x^2 + 4 < 0 \Leftrightarrow$

$$y^2 - 5y + 4 < 0 \overset{\varepsilon\tau\varepsilon\rho}{\Leftrightarrow} 1 < y < 4 \text{ άρα } 1 < x^2 < 4 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{1} < \sqrt{x^2} < \sqrt{4} \Leftrightarrow 1 < |x| < 2 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} |x| > 1 \\ |x| < 2 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \begin{matrix} x < -1 \text{ ή } x>1 \\ -2 < x < 2 \end{matrix} \text{ άρα}$$

$$-2 < x < -1 \text{ ή } 1 < x < 2 \text{ δηλ } x \in (-2,-1) \cup (1,2)$$

Α.5. Αφού το τριώνυμο είναι $\neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δεν έχει ρίζες. Θα έχει επομένως Δ<0, οπότε είναι πάντα ομόσημο του α. Οι τιμές του λοιπόν έχουν όλες ίδιο πρόσημο .
Είναι $f(0) = 2013 > 0$ άρα και $f(2014) > 0$.

Θέμα 3ο

Α.1. Αφού οι αριθμοί είναι δ.ο.α.π θα ισχύει:

$$\left(x^2 + 3 + \kappa\right) - \left(-x^3 + \kappa\right) = \left(-3x + \kappa\right) - \left(x^2 + 3 + \kappa\right) (= \omega) \Leftrightarrow$$

$$x^3 + x^2 + 3 = -3x - x^2 - 3 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2(x+2) + 3(x+2) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2+3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

Α.2. Οι τρεις όροι είναι οι: $-(-2)^3 + \kappa$, $(-2)^2 + 3 + \kappa$, $-3(-2)+\kappa$
δηλ κ+8 , κ+7 , κ+6 . Έχουν άθροισμα 27 άρα
$\kappa+8+\kappa+7+\kappa+6=27 \Leftrightarrow 3\kappa = 6 \Leftrightarrow \kappa = 2$.

Α.3. Οι τρείς όροι είναι οι 10, 9, 8 οπότε ω=-1.
Είναι $\alpha_{20} = \alpha_1 + 19\omega = 10 + 19 \cdot (-1) \Rightarrow \alpha_{20} = -9$

Α.4. Είναι $S_{20} = \dfrac{20}{2}\left[2\alpha_1 + 19 \cdot \omega\right] = 10\left[2 \cdot 10 + 19(-1)\right] = 10 \cdot 1$

δηλ $S_{20} = 10$

Β. Έχουμε: $\left.\begin{array}{l}\alpha_{13}=\sqrt{2}\\ \alpha_{23}=32\sqrt{2}\end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{array}{ll}\alpha_1\cdot\lambda^{12}=\sqrt{2} & (1)\\ \alpha_1\cdot\lambda^{22}=32\sqrt{2} & (2)\end{array}$

Διαιρούμε κατά μέλη : $\dfrac{(2)}{(1)}\Rightarrow\dfrac{\alpha_1\cdot\lambda^{22}}{\alpha_1\cdot\lambda^{12}}=\dfrac{32\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\Rightarrow\lambda^{10}=32\Leftrightarrow$

$\lambda^{10}=2^5\Leftrightarrow \lambda^2=2$

Από την ισότητα (1)$\Rightarrow\alpha_1\cdot 2^6=\sqrt{2}$ άρα $\alpha_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2^6}$ οπότε

$\alpha_{21}=\alpha_1\cdot\lambda^{20}=\dfrac{\sqrt{2}}{2^6}\cdot\left(\lambda^2\right)^5=\dfrac{\sqrt{2}}{2^6}\cdot 2^{10}=2^4\cdot\sqrt{2}$ άρα $\alpha_{21}=16\sqrt{2}$

<u>Θέμα 4ο</u>

Α. Έστω x η τιμή αγοράς .Αυτή προκύπτει από την προκαταβολή και τις 10 δόσεις, οι οποίες αποτελούν αριθμητική πρόοδο , έστω α_1 ο πρώτος όρος και ω η διαφορά .Τότε είναι :

$620<x<640\Leftrightarrow 620<120+S_{10}<640\Leftrightarrow$

$500<\dfrac{10}{2}\left[2\alpha_1+9\cdot\omega\right]<520\Leftrightarrow 500<5(2\alpha_1+9\omega)<520$

$100<2\alpha_1+9\omega<104$ (1)

Α.1. Είναι $\alpha_4=48\Leftrightarrow\alpha_1+3\omega=48\Leftrightarrow \alpha_1=48-3\omega$ (2)

Η (1)$\overset{(2)}{\Rightarrow}100<2(48-3\omega)+9\omega<104\Leftrightarrow$

$100<96-6\omega+9\omega<104\Leftrightarrow 4<3\omega<8\Leftrightarrow \dfrac{4}{3}<\omega<\dfrac{8}{3}$.

Επειδή το ω είναι θετικός ακέραιος έχει τιμή ω=2 και α_1=42

Α.2. Η τελευταία , 10^{η} , δόση είναι $\alpha_{10}=\alpha_1+9\omega$ δηλ

$\alpha_{10}=42+9\cdot 2\Rightarrow \alpha_{10}=60€$

Α.3. Η τιμή αγοράς είναι :

$x=10+S_{10}=120+\dfrac{10}{2}(2\alpha_1+9\omega)=120+5(2\cdot 42+9\cdot 2)$ δηλ

$x=630€$.

Β.1. Η παράσταση ορίζεται όταν $\left|x^2-2x+2\right|-10\geq 0$ (1) και

$-x^2+9x>0$ (2)

- Λύνω την (1): $\left|x^2-2x+2\right|-10\geq 0\Leftrightarrow\left|(x^2-2x+1)+1\right|-10\geq 0\Leftrightarrow$

$\left|(x-1)^2+1\right|-10\geq 0\Leftrightarrow(x-1)^2+1-10\geq 0\Leftrightarrow$

$x^2-2x+1+1-10\geq 0\Leftrightarrow x^2-2x-8\geq 0 \underset{\text{του α}}{\overset{\text{ομόσημο}}{\Leftrightarrow}}$ $x\leq -2$ ή $x\geq 4$ (3)

- Λύνω την (2): $-x^2+9x>0 \underset{\text{του α}}{\overset{\text{ετερ}}{\Leftrightarrow}}$ $0<x<9$ (4)

Η συναλήθευση των (3) και (4) είναι τα $x\in[4,9)$

Η $f(x)$ λοιπόν ορίζεται για τα $x\in[4,9)$.

Β2. Είναι $\alpha_1=4$ και $\lambda=\sqrt{4}=2$.

Θέλουμε να είναι $\alpha_\nu\leq 1024$ δηλ $\alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1}\leq 1024$ δηλ

$4\cdot 2^{\nu-1}\leq 1024\Leftrightarrow 2^{\nu-1}\leq 256\Leftrightarrow 2^{\nu-1}\leq 2^8 \Leftrightarrow \nu-1\leq 8\Leftrightarrow\nu\leq 7$

Οι όροι λοιπόν μέχρι και τον $\boldsymbol{\alpha_7}$ δεν ξεπερνούν το 1024 .