ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

89

Ον/μο:……………….. **Α΄ Λυκείου**

Ύλη: Πιθανότητες –Το σύνολο R-Εξισώσεις **26-01-14**

Θέμα 1ο:

Α. 1. Να δώσετε τον ορισμό της εξίσωσης 2ου βαθμού **(μον.3)**

Α.2. Αν x_1 , x_2 ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ **,** να αποδείξετε ότι και η εξίσωση $x^2-Sx+P=0$ έχει τις ίδιες ρίζες . **(μον.6)**

Α.3. Να αποδείξετε ότι $|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|$. Πότε ισχύει το =; **(μον.6)**

Α.4. Να κυκλώσετε το (Σ) ή το (Λ) στις προτάσεις :

1. Αν $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{2}$ και $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$ τότε $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$ **Σ Λ**

2. Για τα ενδεχόμενα Α και Β ισχύει η ισότητα: $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B')\cup(A'\cap B)$ **Σ Λ**

3. Αν $(x-2)^2+(y+1)^2=0$ τότε x=2 και y=-1 **Σ Λ**

4. $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\ge 0$ και $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\le 0$ **Σ Λ**

5. Αν $2<x<5$ τότε $|x-2|+|x-5|=3$ **Σ Λ**

6. $\sqrt{9+4\sqrt{5}}=2+\sqrt{5}$ **Σ Λ**

7. Η εξίσωση $\alpha x^2+2x-\alpha=0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. **Σ Λ**

8. Οι εξισώσεις $\frac{2x^2+3x+1}{x^2-1}=5$ και $(2x^2+3x+1)=5(x^2-1)$ έχουν τις ίδιες λύσεις . **Σ Λ**

9. Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x και y που έχουν άθροισμα S=2 και γινόμενο P=2 **Σ Λ**

10. Η εξίσωση $x^2-\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)x+1=0$, με $\alpha\ne 0$, 1 έχει δύο ρίζες άνισες και αντίστροφες . **Σ Λ**

(μον.10)

Θέμα 2ο:

Β.1. Ένα κουτί περιέχει κόκκινες , άσπρες και 20 μαύρες μπάλες . Επιλέγουμε τυχαία μια μπάλα .Αν η πιθανότητα να επιλέξουμε κόκκινη μπάλα είναι $\frac{1}{8}$ και η πιθανότητα να επιλέξουμε άσπρη είναι $\frac{1}{4}$, να βρείτε πόσες μπάλες έχει το κουτί . **(μον.7)**

Β.2.α) Στην εξίσωση $\alpha x^2-4x+1=0$, το α καθορίζεται από τη ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού .Να βρείτε την πιθανότητα η εξίσωση να είναι αδύνατη . **(μον.4)**

β) Δίνεται η εξίσωση $x^2-\alpha x+\beta=0$ **,** όπου α , β καθορίζονται από τη ρίψη δύο αμερόληπτων ζαριών .Να βρείτε την πιθανότητα η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες , δοθέντος ότι η εξίσωση του α) ερωτήματος είναι αδύνατη . **(μον.5)**

Β.3. Θεωρούμε την εξίσωση $\left|P(A)-\frac{3}{4}\right|+\sqrt{P(B)-\frac{1}{2}}=0$

όπου P(A) , P(B) οι πιθανότητες πραγματοποίησης δύο ενδεχομένων του ίδιου δειγματικού χώρου Ω .

α.) Να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα . **(μον.4)**

β). Αν $P(A\cap B)=\frac{3}{8}$ **,** να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α ή το Β . **(μον.5)**

Θέμα 3ο:

Γ.1. Να αποδείξετε ότι :

α) $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{x\cdot y},\quad x,y\geq 0$ **β)** $\frac{x+1}{2}\geq\sqrt{x},\quad x\geq 0$

γ) $(x+1)(y+1)(z+1)\geq 8\sqrt{xyz},\quad x,y,z\geq 0$ **δ)** $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geq 2$

(μον.10)

Γ.2. Αν η εξίσωση $\left(\lambda^2+\lambda\right)\cdot x=\lambda^2+3\lambda+2$ έχει άπειρες λύσεις να αποδείξετε ότι η $\left(\lambda^{2014}-1\right)\cdot x=\lambda^{2017}-1$ είναι αδύνατη. **(μον.4)**

Γ.3. Να λυθεί η εξίσωση $|2x+3|\cdot|3-2x|=16$ **(μον.4)**

Γ.4. Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής την παράσταση $\left|x^2+\frac{1}{x^2}-2\right|$. **(μον.4)**

Γ.5. Αν ο μ^2 είναι άρτιος φυσικός αριθμός , τότε να αποδείξετε ότι ο μ είναι άρτιος ακέραιος . **(μον.3)**

Θέμα 4ο:

Δ.1. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2}\cdot x^2-\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\cdot x+\sqrt{5}=0$ **(μον.4)**

Δ.2. Δίνεται η εξίσωση $x^2-(2\nu+1)x+\nu^2+\nu=0, \quad \nu\in N^*$.

Αποδείξτε ότι :

α) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες , η μία άρτια και η άλλη περιττή . **(μον.4)**

β) $(x_1-x_2)^{2014}=1$ **(μον.1)**

Δ.3. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \quad \alpha\cdot\gamma\neq 0$ **.**

Αν $|\alpha-\gamma|=|\alpha|+|\gamma|$ να δείξετε ότι η εξίσωση έχει άνισες ρίζες. **(μον.4)**

Δ.4. Αν η εξίσωση $x^2-\lambda x+|\lambda|-2=0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες, τις x_1 και x_2 τότε :

α) Να βρείτε τις τιμές του λ . **(μον.3)**

β) Για λ=-1 να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

i) $x_1^2+x_2^2$ **ii)** $|x_1-x_2|$ **iii)** $|x_1^3-x_2^3|$ **(μον.9)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1ο:

Α.1. Θεωρία **Α.2.** Θεωρία **Α.3.** Θεωρία

Α.4. 1Σ , 2Σ , 3Σ , 4Λ , 5Σ , 6Σ , 7Λ , 8Λ , 9Λ , 10Σ

Θέμα 2ο

Β.1. Έστω **κ** οι κόκκινες και **α** οι άσπρες μπάλες .Έχουμε :

$$\left.\begin{array}{l} P(\kappa)=\frac{1}{8} \\ P(\alpha)=\frac{1}{4}\end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{\kappa}{\kappa+\alpha+20}=\frac{1}{8} \\ \frac{\alpha}{\kappa+\alpha+20}=\frac{1}{4}\end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 8\kappa=\kappa+\alpha+20 \\ 4\alpha=\kappa+\alpha+20\end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha=7\kappa-20 \\ 3\alpha=\kappa+20\end{array}\right| \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha=7\kappa-20 \\ 3(7\kappa-20)=\kappa+20\end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha=7\kappa-20 \\ 20\kappa=80\end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{array}{l} \alpha=8 \\ \kappa=4\end{array}$$

Το κουτί λοιπόν έχει α+κ+μ=8+4+20 = $\boxed{32}$ μπάλες.

Β.2. α) Έχουμε το $\alpha \in \Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού γιατί $\alpha \neq 0$ και είναι αδύνατη όταν Δ<0 δηλ. $16-4\alpha<0 \Leftrightarrow 4\alpha>16 \Leftrightarrow \alpha>4$

άρα α=5 ή α=6

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{2}{6}=\boxed{\frac{1}{3}}$

β) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες όταν έχει Δ>0

δηλ. όταν $\alpha^2-4\beta>0$ δηλ . όταν $\alpha^2>4\beta \Leftrightarrow \beta<\frac{\alpha^2}{4}$

- <u>Αν α=5</u> τότε $\beta<\frac{5^2}{4}=\frac{25}{4}=6,25$ άρα

  $(\alpha,\beta)=(5,1),\quad (5,2),\quad (5,3),\quad (5,4),\quad (5,5),\quad (5,6)$

- <u>Αν α=6</u> τότε $\beta<\frac{6^2}{4}=\frac{36}{4}=9$ άρα

(α,β) =(6,1) , (6,2) , (6,3) , (6,4) , (6,5) , (6,6)
Ο δειγματικός χώρος έχει, από το γνωστό πίνακα διπλής εισόδου για παράδειγμα, 36 στοιχεία .

Η ζητούμενη πιθανότητα λοιπόν είναι : $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{12}{36}=\boxed{\frac{1}{3}}$

Β.3.α) Από την εξίσωση $\left|P(A)-\frac{3}{4}\right|+\sqrt{P(B)-\frac{1}{2}}=0 \Leftrightarrow$

$P(A)-\frac{3}{4}=0$ και $P(B)-\frac{1}{2}=0$ άρα $P(A)=\frac{3}{4}$ και $P(B)=\frac{1}{2}$.

Έστω Α και Β ασυμβίβαστα .Τότε από την ισότητα

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3+2}{4}=\frac{5}{4}>1$,

άτοπο .Άρα τα ενδεχόμενα Α και Β είναι συμβιβαστά .

β) Το ενδεχόμενο « να πραγματοποιηθεί το Α ή το Β» είναι το $A\cup B$.Ξέρουμε ότι $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$,

άρα $P(A\cup B)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{3}{8}=\frac{6+4-3}{8}=\boxed{\frac{7}{8}}$

<u>Θέμα 3ο</u>

Γ.1. α) Θ.δ.ο $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}\Leftrightarrow x+y\geq 2\sqrt{xy}\Leftrightarrow \sqrt{x}^2+\sqrt{y}^2-2\sqrt{x}\sqrt{y}\geq 0$

$\Leftrightarrow(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geq 0$ **,** που ισχύει

β) Η σχέση του α) ερωτήματος , για y=1 δίνει $\frac{x+1}{2}\geq\sqrt{x}$

γ) Σύμφωνα με το β) ερώτημα έχουμε :

$$\left.\begin{array}{l} x+1\geq 2\sqrt{x} \\ y+1\geq 2\sqrt{y} \\ z+1\geq 2\sqrt{z} \end{array}\right| \overset{(\cdot)}{\Rightarrow}(x+1)(y+1)(z+1)\geq 8\sqrt{xyz}$$

δ) Από το β) έχουμε ότι $\frac{x+1}{\sqrt{x}}\geq 2$.

Για $x \to x^2+1$ έχουμε $\dfrac{(x^2+1)+1}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$ δηλ $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$

Γ.2. Αφού η εξίσωση $\left(\lambda^2+\lambda\right)\cdot x=\lambda^2+3\lambda+2$ έχει άπειρες λύσεις

θα είναι $\lambda^2+\lambda=0$ και $\lambda^2+3\lambda+2=0 \Leftrightarrow \left(\lambda=0 \text{ ή } \lambda=-1\right)$ και

$\left(\lambda=-1 \text{ ή } \lambda=-2\right)$ άρα $\lambda=-1$.Για $\lambda=-1$ η δεύτερη εξίσωση έχει:

$\alpha=(-1)^{2014}-1=0$ και $\beta=(-1)^{2017}-1=-2\neq 0$ οπότε είναι αδύνατη.

Γ.3. Η εξίσωση $|2x+3|\cdot|3-2x|=16$ γράφεται ισοδύναμα :

$|2x+3|\cdot|2x-3|=16 \Leftrightarrow |(2x+3)\cdot(2x-3)|=16 \Leftrightarrow$

$\left|(2x)^2-3^2\right|=16 \Leftrightarrow \left|4x^2-9\right|=16 \Leftrightarrow 4x^2-9=16 \text{ ή } 4x^2-9=-16 \Leftrightarrow$

$4x^2=25$ ή $\underbrace{4x^2=-7}_{\text{αδύνατη}}$ άρα $x^2=\dfrac{25}{4} \Leftrightarrow \boxed{x=\pm\dfrac{5}{2}}$

Γ.4. Έχουμε : $x^2+\dfrac{1}{x^2}-2=\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2}=\dfrac{\left(x^2-1\right)^2}{x^2}\geq 0$

Άρα $\left|x^2+\dfrac{1}{x^2}-2\right|=x^2+\dfrac{1}{x^2}-2$

Γ.5. Έστω ότι ο μ δεν είναι άρτιος ακέραιος δηλ. έστω είναι περιττός.

Τότε : $\mu=2\kappa+1, \quad \kappa\in Z \Rightarrow \mu^2=(2\kappa+1)^2=4\kappa^2+4\kappa+1=$

$=2\underbrace{(2\kappa^2+2\kappa)+1}_{\lambda\in z}=2\lambda+1$, δηλ. μ^2 περιττός ακέραιος .

Αυτό είναι άτοπο . Άρα ο μ είναι άρτιος .

Θέμα 4ο

Δ.1. Η εξίσωση έχει $\Delta=\left[-\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\right]^2-4\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}=$

$$=\sqrt{5}^2+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}^2-4\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{5}^2-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{2}^2=$$

$=\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2>0$ και ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}\pm\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}\pm\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{2\sqrt{2}}$$ άρα :

$$x_1=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\boxed{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}$$

$$x_2=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\boxed{1}$$

Δ.2. α) Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta=\left[-(2\nu+1)\right]^2-4\left(\nu^2+\nu\right)=$

$=4\nu^2+4\nu+1-4\nu^2-4\nu=1$ και ρίζες :

$x_{1,2}=\dfrac{2\nu+1\pm\sqrt{1}}{2}=\dfrac{2\nu+1\pm1}{2}$ άρα $x_1=\dfrac{2\nu+2}{2}=\dfrac{2(\nu+1)}{2}$

δηλ $x_1=\nu+1$ και $x_2=\dfrac{2\nu+1-1}{2}=\dfrac{2\nu}{2}$ δηλ $x_2=\nu$.

Οι ρίζες είναι διαδοχικοί φυσικοί , επομένως η μία άρτιος και η άλλη περιττός αριθμός .

β) $\left(x_1-x_2\right)^{2014}=\left(\nu+1-\nu\right)^{2014}=1^{2014}=1$

Δ.3. Αφού $\alpha\cdot\gamma\neq0$ είναι α και $\gamma\neq0$ οπότε η εξίσωση είναι $2^{ου}$ βαθμού . Από την ισότητα $|\alpha-\gamma|=|\alpha|+|\gamma|$ έχουμε ότι και

$$|\alpha-\gamma|^2=\left(|\alpha|+|\gamma|\right)^2\Leftrightarrow(\alpha-\gamma)^2=|\alpha|^2+2|\alpha|\cdot|\gamma|+|\gamma|^2\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2-2\alpha\gamma+\gamma^2=\alpha^2+2|\alpha\gamma|+\gamma^2\Leftrightarrow|\alpha\gamma|=-\alpha\gamma \text{ άρα } \alpha\cdot\gamma<0$$

οπότε οι α , γ είναι ετερόσημοι .Έτσι η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει δύο άνισες ρίζες .

Δ.4. α) Αφού η εξίσωση έχει ετερόσημες ρίζες θα είναι $P<0$ δηλ
$|\lambda|-2<0 \Leftrightarrow |\lambda|<2 \Leftrightarrow -2<\lambda<2$

β) Για λ=-1 η εξίσωση γίνεται $x^2+x-1=0$ και έχει
$S=x_1+x_2=-1$ και $P=x_1x_2=-1$.
Έχουμε λοιπόν :

i) $x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=(-1)^2-2\cdot\left(-1\right)=3$

ii) $|x_1-x_2|^2=(x_1-x_2)^2=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2\overset{(i)}{=}3-2\cdot(-1)=5$
άρα $|x_1-x_2|=\sqrt{5}$

iii) $\left|x_1^3-x_2^3\right|=\left|(x_1-x_2)\cdot(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)\right|=$
$=|x_1-x_2|\cdot\left|(x_1^2+x_2^2)+x_1x_2\right|\underset{(i)}{\overset{(ii)}{=}}\sqrt{5}\cdot|3+(-1)|=2\sqrt{5}$