ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

88

Ον/μο:……………….. **Α΄ Λυκείου**

Ύλη: 2^{ο} Κεφαλαιο-Οι πραγματικοί αριθμοί **08-12-13**

<u>Θέμα 1^{ο}:</u>

Α. 1. Αν Α(α) και Β(β) σημεία στον άξονα των πραγματικών αριθμών και Μ(x_0) το μέσο του ΑΒ να αποδείξετε ότι $x_0 = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

(μον.9)

Α.2. α) Τι ονομάζεται απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α ; **(μον.3)**

β) Τι ονομάζεται ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α; **(μον.3)**

Α.3. Να κυκλώσετε το (Σ) ή το (Λ) στις προτάσεις :

1. $(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3+\beta^3$ **Σ Λ**

2. $(\alpha+\beta-\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\alpha\gamma$ **Σ Λ**

3. $\alpha^2>0$ **,** για κάθε $\alpha\in R$ **Σ Λ**

4. $\alpha^2+\beta^2>0 \Leftrightarrow \alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$ **Σ Λ**

5. Αν $x\leq\alpha$ τότε $x\in(-\infty,\alpha]$ **Σ Λ**

6. $-|\alpha|\leq\alpha\leq|\alpha|$ **Σ Λ**

7. $\sqrt{\alpha^2}=\sqrt{\alpha}^2$ για κάθε $\alpha\in R$ **Σ Λ**

8. $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$ αν α,β ομόσημοι **Σ Λ**

9. Αν $\alpha,\beta\geq 0$ τότε $\alpha\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\cdot\beta}$ **Σ Λ**

10. Αν $\alpha>0$ **,** $\mu\in\mathbb{Z}$, $\nu\in N^*$ τότε $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$ **Σ Λ**

(μον.10)

<u>Θέμα 2^{ο}:</u>

Β.1. Αν οι αριθμοί $\dfrac{1}{\alpha},\beta$ είναι αντίθετοι να δείξετε ότι οι αριθμοί

$x=\alpha-[-(\alpha-2\beta)\cdot 3+2\beta]$ και $y=2\cdot[4\beta-(\beta+2)\cdot\alpha-1]$

είναι αντίθετοι . **(μον.6)**

Β.2. Αν $\alpha+\beta=-2$ και $\alpha\cdot\beta=-3$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\alpha^2+\beta^2$ **β)** $\alpha^3+\beta^3$ **γ)** $\alpha^4+\beta^4$ **(μον.9)**

Β.3. Να αποδείξετε ότι :

$(\alpha+\beta)^3-3(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)+3(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2-(\alpha-\beta)^3=8\beta^3$ **(μον.5)**

Β.4. Αν $4x^2+y^2+\omega^2-4x+2y+2\leq 0$ να βρείτε τους x,y,ω **(μον.5)**

Θέμα 3^o:

Γ.1.Αν $\alpha,\beta,\gamma\in R$ να δείξετε ότι :

α) $2(\alpha^2+\beta^2)\geq(\alpha+\beta)^2$

β) $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}+\dfrac{\beta^2+\gamma^2}{\beta+\gamma}+\dfrac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma+\alpha}\geq\alpha+\beta+\gamma$ με α , β, γ>0 **(μον.6)**

Γ.2. Αν $x\notin(\alpha,\beta)$ να δείξετε ότι $\left||\alpha-x|-|\beta-x|\right|=\beta-\alpha$ **(μον.7)**

Γ.3. Αν $\alpha,\beta\in R$ και ισχύουν οι σχέσεις

$\alpha+\beta=\alpha\cdot\beta$, $\alpha\cdot|\beta|=\beta\cdot|\alpha|$, $\alpha\cdot\beta\neq 0$ να δείξετε ότι :

α) α>0 και β>0 **(μον.3)**

β) $\dfrac{|\alpha+\beta|}{\alpha}+\dfrac{|\alpha-\beta|}{\beta}\geq 2$ **(μον.4)**

Γ.4. Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{x^2-6x+9}=-x+3$ **(μον.5)**

Θέμα 4^o:

Δ1. Δίνεται ο αριθμός $\kappa=\sqrt{7-4\sqrt{3}}-\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

α) Να βρεθεί ο αριθμός κ**.** **(μον.5)**

β) Να βρεθεί ο αριθμός $\sqrt{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ **(μον.4)**

γ) Να βρεθεί ο αριθμός $\beta=(1+\kappa+2\sqrt{3})^{2013}$ **(μον.3)**

δ) Να αποδείξετε ότι αν α>0 τότε $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\geq 2$ και στη συνέχεια ότι για κάθε θετικό ακέραιο x ισχύει :

$\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^x\geq 2$ **(μον.8)**

Δ.2. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$A=\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{4y^2-4y+1}$ **(μον.5)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1ο:

Α.1. Θεωρία **Α.2.** Θεωρία

Α.3. 1Λ , 2Σ , 3Λ , 4Σ , 5Σ , 6Σ , 7Λ , 8Λ , 9Σ , 10Σ

Θέμα 2ο

Β.1. Αφού οι $\frac{1}{\alpha}$ και β είναι αντίθετοι θα ισχύει $\frac{1}{\alpha}+\beta=0 \Leftrightarrow$

$1+\alpha\beta=0 \Leftrightarrow \alpha\beta=-1$ **(1)**

Για τους x και y έχουμε :

$$x+y=\alpha-\left[-(\alpha-2\beta)\cdot 3+2\beta\right]+2\left[4\beta-(\beta+2)\cdot\alpha-1\right]=$$
$$=\alpha-(-3\alpha+6\beta+2\beta)+2(4\beta-\alpha\beta-2\alpha-1)=$$
$$=\alpha+3\alpha-8\beta+8\beta-2\alpha\beta-4\alpha-2=$$
$$=-2\cdot\alpha\beta-2\overset{(1)}{=}-2(-1)-2=2-2=0$$

άρα οι x και y είναι αντίθετοι .

Β.2. α) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\cdot(-3)=4+6=10$

β) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)\overset{(\alpha)}{=}$

$=(-2)\cdot(10-(-3))=(-2)\cdot 13=-26$

γ) $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2)^2+(\beta^2)^2=\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2-2\alpha^2\beta^2\overset{(\alpha)}{=}$

$=10^2-2(-3)^2=100-18=82$

Β.3. $(\alpha+\beta)^3-3(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)+3(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2-(\alpha-\beta)^3=$

$=\left[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)\right]^3=(\alpha+\beta-\alpha+\beta)^3=(2\beta)^3=8\beta^3$

Β.4 . Είναι : $4x^2+y^2+\omega^2-4x+2y+2\le 0 \Leftrightarrow$

$(4x^2-4x+1)+(y^2+2y+1)+\omega^2\le 0 \Leftrightarrow$

$(2x-1)^2+(y+1)^2+\omega^2\le 0$ οπότε $(2x-1)^2+(y+1)^2+\omega^2=0$

Άρα $(2x-1)^2$ και $(y+1)^2=0$ και $\omega^2=0 \Leftrightarrow$

$x=\frac{1}{2}$ και y=-1 και ω=0.

Θέμα 3[ο]

Γ.1. α) Θ.δ.ο $2\left(\alpha^2+\beta^2\right)\geq(\alpha+\beta)^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2+2\beta^2\geq\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \Leftrightarrow$

$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2\geq 0$ **,** που ισχύει .

β) Απ' το **α)** ερώτημα έχουμε :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}\geq\dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ \dfrac{\beta^2+\gamma^2}{\beta+\gamma}\geq\dfrac{\beta+\gamma}{2} \\ \dfrac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma+\alpha}\geq\dfrac{\gamma+\alpha}{2} \end{array}\right| \overset{(+)}{\Rightarrow} \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}+\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma+\alpha}\geq\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\beta+\gamma}{2}+\frac{\gamma+\alpha}{2}=$$

$$=\frac{\alpha+\beta+\beta+\gamma+\gamma+\alpha}{2}=\frac{2(\alpha+\beta+\gamma)}{2}=\alpha+\beta+\gamma$$

Γ.2. Αφού $x\notin(\alpha,\beta)$ σημαίνει
ότι $x\leq\alpha$ ή $x\geq\beta$

- Αν $x\leq\alpha$ έχω : $\alpha-x\geq 0,\quad \beta-x>0$ και $\alpha-\beta<0$ οπότε:

$$\big||\alpha-x|-|\beta-x|\big|=|(\alpha-x)-(\beta-x)|=|\alpha-x-\beta+x|=|\alpha-\beta|=\beta-\alpha$$

- Αν $x\geq\beta$ έχω : $\alpha-x<0,\quad \beta-x\leq 0$ και $\beta-\alpha>0$ οπότε :

$$\big||\alpha-x|-|\beta-x|\big|=|(-\alpha+x)-(-\beta+x)|=|-\alpha+x+\beta-x|=|\beta-\alpha|=\beta-\alpha$$

Γ.3. α) Αφού $\alpha\cdot|\beta|=\beta\cdot|\alpha|$ και $\alpha\cdot\beta>0$ και α , β ομόσημοι θα είναι και οι δύο θετικοί δηλ α>0 και β>0.

β) είναι α+β>0 και η $\dfrac{|\alpha+\beta|}{\alpha}+\dfrac{|\alpha-\beta|}{\beta}\geq 2$ γράφεται :

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha}+\frac{|\alpha-\beta|}{\beta}\geq 2 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha}+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{|\alpha-\beta|}{\beta}\geq 2 \Leftrightarrow \quad \textbf{(1)}$$

- Αν $\alpha > \beta \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha-\beta}{\beta} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\beta} \geq 1 \Leftrightarrow$

$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} - 1 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} \geq 2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow$

$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 \geq 0$, που ισχύει .

- Αν $\alpha < \beta \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta-\alpha}{\beta} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} \geq 1 \Leftrightarrow$

$\frac{\beta}{\alpha} + 1 - \frac{\alpha}{\beta} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} \geq 0 \Leftrightarrow \beta^2 - \alpha^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\beta^2 > \alpha^2 \overset{\alpha,\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta > \alpha$, που ισχύει .

Γ.4. Η εξίσωση $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = -x + 3$ γράφεται $\sqrt{(x-3)^2} = -x + 3 \Leftrightarrow$

$|x-3| = -x + 3$ άρα $x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$

Θέμα 4ο

Δ.1. α) Είναι $\kappa = \sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{7+4\sqrt{3}} =$

$= \sqrt{2^2 + \sqrt{3}^2 - 2\cdot 2\sqrt{3}} - \sqrt{2^2 + \sqrt{3}^2 + 2\cdot 2\cdot \sqrt{3}} =$

$= \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} - \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} =$

$= |2-\sqrt{3}| - |2+\sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3} - 2 - \sqrt{3} = -2\sqrt{3}$ δηλ $\kappa = -2\sqrt{3}$

β) Είναι : $\sqrt{7-4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})} =$

$= \sqrt{7^2 - (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{49-48} = \sqrt{1} = 1$ άρα $\sqrt{7-4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{7+4\sqrt{3}} = 1$

γ) Είναι $\beta = (1 + \kappa + 2\sqrt{3})^{2013} \overset{(\alpha)}{=} (1 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3})^{2013} = 1^{2013}$ άρα β=1.

δ) Θ.δ.ο $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2 \overset{\cdot\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha^2 + 1 \geq 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha-1)^2 \geq 0$, που ισχύει . Άρα $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$ **(1)**

Οι αριθμοί $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^x, \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^x$ έχουν γινόμενο

$$\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^x \cdot \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^x = \left(\sqrt{7-4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^x \overset{(\beta)}{=} 1^x = 1$$

δηλ είναι θετικοί αντίστροφοι . Σύμφωνα με την (1) λοιπόν θα ισχύει και ότι $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^x \geq 2$

Δ.2. Είναι : $A = \sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{4y^2-4y+1} =$

$= \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(2y-1)^2} = |x-2| + |2y-1| \geq 0$.

Το = ισχύει όταν x=2 και y=$\frac{1}{2}$ άρα η ελάχιστη τιμή της παράστασης είναι $A_{min}=0$