Test

Ον/μο:……………….. **Α΄ Λυκείου**
Ύλη: Ταυτότητες-Διάταξη **10-11-13**

Α. Να κυκλώσετε το **(Σ)** ή το **(Λ)** στις προτάσεις :

1. $(\alpha-\beta)^2=(\beta-\alpha)^2$ **Σ Λ**
2. $\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$ **Σ Λ**
3. Αν α+β+γ=0 τότε $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$ **Σ Λ**
4. $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha^2>\beta^2$ **Σ Λ**
5. $\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha^3<\beta^3$ **Σ Λ**
6. $\alpha>\beta$ και $\gamma>\delta \Rightarrow \alpha\gamma>\beta\delta$ **Σ Λ**
7. $\frac{\alpha}{\beta}>\frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha}<\frac{\delta}{\gamma}$ **Σ Λ**
8. Αν $\frac{\alpha}{\beta}>1$ τότε α>β. **Σ Λ**
9. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>0 \Leftrightarrow \alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$ ή $\gamma\neq 0$ **Σ Λ**
10. $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}>\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ **Σ Λ**

(20 μον.)

Β. Δίνεται η παράσταση $A(x)=\frac{x^2+x}{x^2-1}-\frac{x+2}{x^2+x-2}$.

1. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση . **(12 μον.)**
2. Να απλοποιηθεί η παράσταση . **(12 μον.)**

Γ. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$K=\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha+\beta}-\frac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{\alpha-\beta}+\frac{2\beta^3-\beta^2+\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}\ ,\ \alpha\neq\beta\ ,\ \alpha\neq-\beta$$

(20 μον.)

Δ. 1. Αν $0<\alpha\leq 2$ και $1\leq\beta<3$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών περιέχεται η τιμή της παράστασης $3\alpha-\beta+2$. **(12 μον.)**

2. Αν $\beta>\alpha>0$ να δείξετε ότι :

α) $\dfrac{\alpha}{1+\alpha}<\dfrac{\beta}{1+\beta}$ **β)** $\dfrac{\alpha}{1+\alpha}<\dfrac{\alpha+\beta}{1+\beta}$ **(12 μον.)**

3. Αν α, β>0 να δείξετε ότι : $\dfrac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta}<\dfrac{\alpha}{1+\alpha}+\dfrac{\beta}{1+\beta}$. **(12μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

Α. 1Σ , 2Σ , 3Σ , 4Λ , 5Σ , 6Λ , 7Λ , 8Λ , 9Σ , 10Λ

Β. **1.** Η παράσταση ορίζεται όταν δεν μηδενίζονται οι παρανομαστές .
Είναι :

- $x^2-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$
- $x^2+x-2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-2$

Η παράσταση επομένως ορίζεται για $x\neq -1$, $x\neq -2$ και $x\neq 1$

2. Η παράσταση γράφεται :

$$A(x)=\frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{x+2}{(x-1)(x+2)}=\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}=1$$

Γ. Έχουμε :

$$K=\frac{(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)(\alpha-\beta)-(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)(\alpha+\beta)+2\beta^3-\beta^2+\alpha^2}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}=$$

$$=\frac{(\alpha^3-\beta^3)-(\alpha^3+\beta^3)+2\beta^3+\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}=\frac{\alpha^3-\beta^3-\alpha^3-\beta^3+2\beta^3+\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}=$$

$$=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}=1.$$

Δ.1.

Έχουμε : $\left.\begin{matrix}0<\alpha\leq 2\\ 1\leq\beta<3\end{matrix}\right| \underset{\cdot(-1)}{\overset{\cdot 3}{\Rightarrow}} \left.\begin{matrix}0<3\alpha\leq 6\\ -1\geq-\beta>-3\end{matrix}\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix}0<3\alpha\leq 6\\ -3<-\beta\leq -1\end{matrix}\right| \overset{(+)}{\Rightarrow}$

$$-3<3\alpha-\beta\leq 5 \overset{(+2)}{\Rightarrow} -1<3\alpha-\beta+2\leq 7$$

2. α) Θ.δ.ο $\frac{\alpha}{1+\alpha}<\frac{\beta}{1+\beta} \overset{\cdot(1+\alpha)(1+\beta)>0}{\Leftrightarrow} \alpha(1+\beta)<\beta(1+\alpha)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha+\alpha\beta<\beta+\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha<\beta$, που ισχύει απ' την υπόθεση.

β) Έχουμε απ' το α)ερώτημα ότι $\frac{\alpha}{1+\alpha}<\frac{\beta}{1+\beta}$ οπότε :

$\frac{\alpha}{1+\alpha}<\frac{\beta}{1+\beta}<\frac{\alpha+\beta}{1+\beta}$ άρα $\frac{\alpha}{1+\alpha}<\frac{\beta}{1+\beta}$.

3. Είναι : $\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta}=\frac{\alpha}{1+\alpha+\beta}+\frac{\beta}{1+\alpha+\beta}<\frac{\alpha}{1+\alpha}+\frac{\beta}{1+\beta}$ γιατί

$1+\alpha+\beta>1+\alpha$ και $1+\alpha+\beta>1+\beta$.
(Όσο μεγαλύτερος παρονομαστής τόσο μικρότερο κλάσμα).