

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

85

Όν/μο:.....

Α΄ Λυκείου

Ύλη: Σύνολα-Πιθανότητες

29-09-13

Θέμα 1^ο:

A. 1. Να δώσετε τον ορισμό του συνόλου. **(Μον.3)**

2. Με ποιούς τρόπους παριστάνεται ένα σύνολο;
Γράψτε από ένα παράδειγμα. **(Μον.3)**

3. Αν $A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ διαιρέτης του } 20\}$ και
 $B = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ διαιρέτης του } 30\}$ να βρείτε τα:
α. $A \cup B$ β. $A \cap B$ **(Μον.4)**

B. 1. Να δώσετε τον ορισμό του δειγματικού χώρου ,ενός πειράματος τύχης. **(Μον.3)**

2. Τι λέγεται ενδεχόμενο (ή γεγονός) **(Μον.4)**

3. Να συμπληρώσετε τα κενά:

Λεκτικά

Γλώσσα συνόλων

● Το ενδεχόμενο A πραγματοποιείται $\omega \in A$

● Το ενδεχόμενο A δεν πραγματοποιείται

● Ένα τουλάχιστον από τα A και B πραγματοποιείται.

● Πραγματοποιούνται αμφότερα τα A και B.

● Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B.

● Πραγματοποιείται μόνο το A.

● Η πραγματοποίηση του A συνεπάγεται την πραγματοποίηση του B.

● Πραγματοποιείται μόνο ένα απ' τα A και B. **(Μον.8)**

Θέμα 2^ο:

A. Για δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A)=0,6$ και $P(B)=0,5$.

1. Να εξετάσετε αν τα A και B είναι ασυμβίβαστα. **(Μοv.5)**

2. Να αποδείξετε ότι $0,1 \leq P(A \cap B) \leq 0,5$ **(Μοv.5)**

B. Δύο φίλοι παίζουν τάβλι και συμφωνούν ότι νικητής θα είναι όποιος κερδίσει 4 παρτίδες ή 2 συνεχόμενες παρτίδες.

1. Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος. **(Μοv.8)**

2. Αν τα ενδεχόμενα A και B είναι τα

$A: \langle\langle \text{Αναδεικνύεται νικητής σε δύο συνεχόμενες νίκες} \rangle\rangle$

$B: \langle\langle \text{αναδεικνύεται νικητής σε στη δεύτερη παρτίδα} \rangle\rangle$

να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$. **(Μοv.7)**

Θέμα 3^ο:

A.1. Τι ονομάζουμε πιθανότητα ενός ενδεχομένου A . **(Μοv.5)**

2. Να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου A . **(Μοv.5)**

B. Η B' τάξη ενός Λυκείου έχει 70 μαθητές. Επιλέγουμε στην τύχη έναν μαθητή του Λυκείου. Η πιθανότητα να είναι μαθητής της B' τάξης είναι 40% ενώ η πιθανότητα να είναι μαθητής της Γ' τάξης είναι 28%. Να βρείτε:

1. Πόσους μαθητές έχει το Λύκειο. **(Μοv.8)**

2. Πόσους μαθητές έχει η κάθε τάξη. **(Μοv.7)**

Θέμα 4^ο:

A. Να αποδείξετε ότι:

1. $P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$

2. $P(A-B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$

3. $P(A' \cap B') \leq P(A' \cup B')$

(Μον.6)

B. Από τους 160 μαθητές ενός σχολείου, για την απασχόληση κατά τις ελεύθερες ώρες τους, 84 επέλεξαν αθλητικά (A), 66 ζωγραφική (Z) και 36 μουσική (M). Κανένας από τους μαθητές δεν επέλεξε ταυτόχρονα μουσική και ζωγραφική. 12 επέλεξαν ταυτόχρονα μουσική και αθλητικά και έστω x ο αριθμός των μαθητών που επέλεξαν ταυτόχρονα αθλητικά και ζωγραφική.

1. Να παρουσιάσετε τις παραπάνω πληροφορίες με τη βοήθεια ενός διαγράμματος Venn.

(Μον.4)

2. Να βρείτε τον αριθμό των μαθητών που επέλεξαν και αθλητικά και ζωγραφική.

(Μον.3)

3. Αν επιλέξουμε τυχαία έναν μαθητή, να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

A_1 : << ο μαθητής έχει επιλέξει μόνο αθλητικά >>

A_2 : << ο μαθητής έχει επιλέξει μόνο μουσική >>

A_3 : << ο μαθητής έχει επιλέξει αθλητικά και μουσική >>

A_4 : << ο μαθητής έχει επιλέξει αθλητικά ή ζωγραφική >>

A_5 : << ο μαθητής έχει επιλέξει μουσική και ζωγραφική >>

A_6 : << ο μαθητής έχει επιλέξει μουσική ή αθλητικά >>

(Μον.12)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1^ο:

A.

1. ΟΡΙΣΜΟΣ (κατα Cantor): Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων , που προέρχονται απ' την εμπειρία μας ή τη διάνοησή μας , είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο .

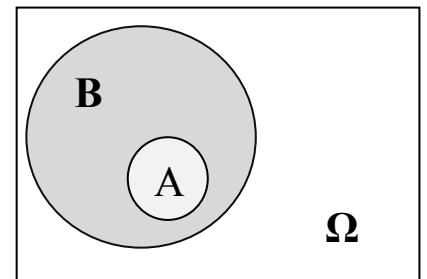
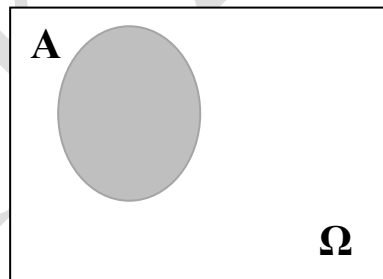
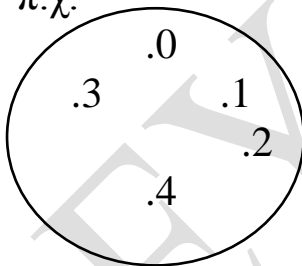
Τα αντικείμενα αυτά που αποτελούν το σύνολο ονομάζονται **στοιχεία** ή **μέλη** του συνόλου.

2. Παράσταση συνόλου

Η παράσταση ενός συνόλου γίνεται με τους εξής τρόπους :

- ◆ **Με αναγραφή των στοιχείων :** Τα στοιχεία του συνόλου γράφονται ένα-ένα μέσα σε δύο άγκιστρα .
π.χ. $A = \{0,1,2,3,4,5\}$.
- ◆ **Με περιγραφή των στοιχείων :** Περιγράφουμε μια κοινή ιδιότητα όλων των στοιχείων η οποία τα καθορίζει .
π.χ. $A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ περιττός με } 10 < x < 17\}$.
- ◆ **Με διάγραμμα του Venn :** Τοποθετούμε όλα τα στοιχεία του συνόλου μέσα σ' ένα «κύκλο» ,σε μια κλειστή γραμμή.

π.χ.



3.Είναι:

$A = 1,2,4,5,10,20$ και $B = 1,2,3,5,6,10,15,30$ οπότε

α. $A \cup B = 1,2,3,4,5,6,10,15,20,30$ και **β.** $A \cap B = 1,2,5,10$

B.

1. Δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του και τον συμβολίζουμε με Ω .

2. Ενδεχόμενο (ή γεγονός) είναι κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου.

3.

Λεκτικά

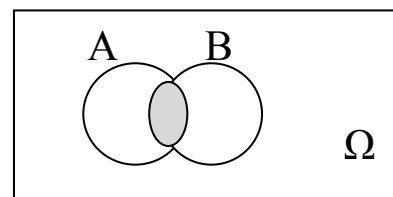
Γλώσσα συνόλων

- Το ενδεχόμενο A πραγματοποιείται $\omega \in A$
- Το ενδεχόμενο A δεν πραγματοποιείται $\omega \in A'$ (ή $\omega \notin A$)
- Ένα τουλάχιστον από τα A και B πραγματοποιείται. $\omega \in A \cup B$
- Πραγματοποιούνται αμφότερα τα A και B. $\omega \in A \cap B$
- Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B. $\omega \in (A \cup B)'$
- Πραγματοποιείται μόνο το A. $\omega \in A - B$ (ή $\omega \in A \cap B'$)
- Η πραγματοποίηση του A συνεπάγεται την πραγματοποίηση του B. $A \subseteq B$
- Πραγματοποιείται μόνο ένα απ' τα A και B. $\omega \in (A - B) \cup (B - A)$

Θέμα 2^ο

A.

1. αν τα A και B ήταν ασυμβίβαστα, από τον απλό προσθετικό νόμο θα είχαμε: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,6 + 0,5 = 1,1$ δηλ. $P(A \cup B) > 1$, που είναι άτοπο. Άρα τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.



2. Επειδή $A \cap B \subseteq A$ είναι και $P(A \cap B) \leq P(A)$ δηλ. $P(A \cap B) \leq 0,5$ (1)

Ακόμη, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,5 - P(A \cap B)$.

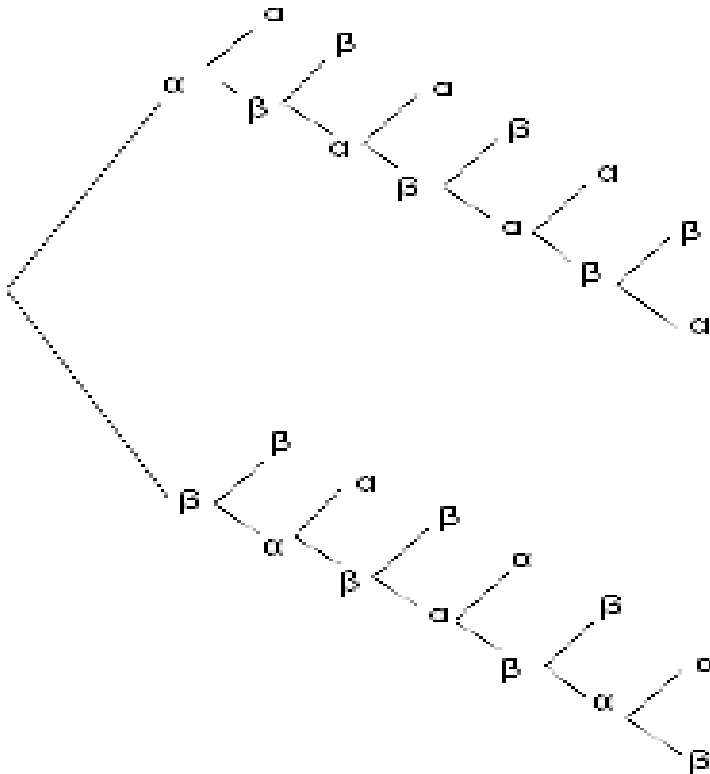
Όμως $P(A \cup B) \leq 1$ επομένως $0,6 + 0,5 - P(A \cap B) \leq 1$ δηλ. $P(A \cap B) \geq 0,1$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $0,1 \leq P(A \cap B) \leq 0,5$.

B.

1.

Σύμφωνα με το δενδροδιάγραμμα



ο δειγματικός χώρος είναι:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} \alpha\alpha, \alpha\beta\beta, \alpha\beta\alpha\alpha, \alpha\beta\alpha\beta\beta, \alpha\beta\alpha\beta\alpha\alpha, \alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta\beta, \alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta\alpha\alpha, \\ \beta\beta, \beta\alpha\alpha, \beta\alpha\beta\beta, \beta\alpha\beta\alpha\alpha, \beta\alpha\beta\alpha\beta\beta, \beta\alpha\beta\alpha\beta\alpha\alpha, \beta\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta \end{array} \right\}$$

2. Είναι:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{12}{14} \quad \text{και} \quad P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{14}$$

Θέμα 3^ο

A.

1. Πιθανότητα ενός ενδεχομένου A ονομάζουμε έναν αριθμό που εκφράζει ένα μέτρο “προσδοκίας” με την οποία αναμένουμε την πραγματοποίησή του.

2.

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης που αποτελείται από ισοπίθανα και απλά ενδεχόμενα. **Πιθανότητα $P(A)$** του ενδεχομένου A ορίζουμε το πηλίκο

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}}$$

ή αλλιώς $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$

B.

1.

Εστω ότι το Λύκειο έχει v μαθητές. Εχουμε ότι

$$P(B) = 0,4 \Rightarrow \frac{70}{v} = 0,4 \Rightarrow v = \frac{70}{0,4} \text{ δηλ. } v = 175$$

2. Εχουμε ότι $P(\Gamma) = 0,28 \Rightarrow \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = 0,28 \Rightarrow \frac{\gamma}{175} = 0,28 \Rightarrow \gamma = 0,28 \cdot 175$ δηλ.

$\gamma = 49$ οι μαθητές της Γ' Λυκείου.

Η A' Λυκείου έχει $\alpha = 175 - 70 - 49 = 56$, δηλ. $\alpha = 56$ οι μαθητές της A' Λυκείου.

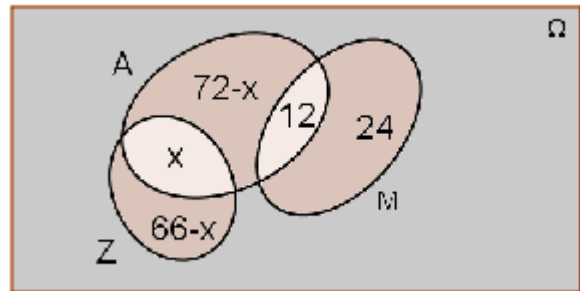
Θέμα 4^ο

A.

1. Είναι: $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ άρα $P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$.
2. Είναι : $A - B \subseteq A \subseteq A \cup B$ άρα $P(A - B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$.
3. Είναι $A' \cap B' \subseteq A' \cup B' \Rightarrow P(A' \cap B') \leq P(A' \cup B')$.

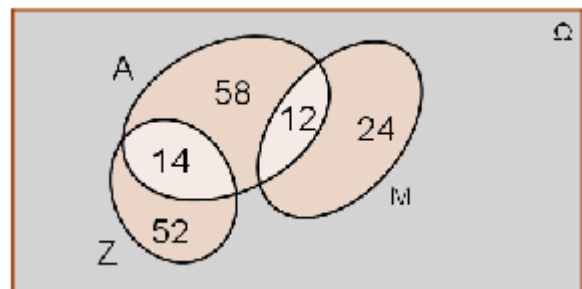
B.

1. Προκύπτει το διπλανό διάγραμμα



2. Είναι : $(72 - x) + 12 + x + 24 + (66 - x) = 160 \Leftrightarrow$
 $72 - x + 12 + x + 24 + 66 - x = 160 \Leftrightarrow x = 14$

3. Έχουμε το διπλανό διάγραμμα Venn: σύμφωνα με το οποίο προκύπτουν οι πιθανότητες :



$$P(A_1) = \frac{58}{160}$$

$$P(A_2) = \frac{24}{160}$$

$$P(A_3) = \frac{12}{160}$$

$$P(A_4) = \frac{58 + 12 + 14 + 52}{160} = \frac{136}{160}$$

$$P(A_5) = P(\emptyset) = 0$$

$$P(A_6) = \frac{58 + 14 + 12 + 24}{160} = \frac{108}{160}$$