

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

82

Όν/μο:.....

Α' Λυκείου

Ύλη: Εξισώσεις

13-01-13

Θέμα 1^ο:

A. 1. Δώστε τον ορισμό της εξίσωσης 2^{ου} βαθμού . (Μον.4)

2. Πότε η παραπάνω εξίσωση έχει :

α) δύο ρίζες άνισες ;

β) μία ρίζα διπλή ;

γ) είναι αδύνατη ;

(Μον.6)

3. Να αποδείξετε ότι αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης

τότε : α) $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ β) $x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$ (Μον.10)

B. Να κυκλώσετε το (Σ) ή το (Λ) στις προτάσεις :

1. Η εξίσωση $(\alpha - 2)x = \alpha(\alpha - 2)$ έχει μοναδική λύση την $x = \alpha$

Σ Λ

2. Η εξίσωση $|x| - 1 \cdot |x| + 2 = 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες .

Σ Λ

3. Η εξίσωση $\alpha x^2 + 2x - \alpha = 0$ έχει δύο ρίζες άνισες

Σ Λ

4. Οι εξισώσεις $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 0$ και $x^2 - 3x + 2 = 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις

Σ Λ

5. Αν $\alpha < 0$, τότε η εξίσωση $x^v = \alpha$, $v \in \mathbb{N}^*$ είναι πάντα αδύνατη

Σ Λ
(Μον.5)

Θέμα 2^ο:

A. Να λυθούν οι εξισώσεις :

1. $x^2 - 5 \cdot x^3 - 6x = 0$

2. $\frac{2x - 2}{x^2 - 36} - \frac{x - 2}{x^2 - 6x} = \frac{x - 1}{x^2 + 6x}$

3. $|x - 1| - \frac{|1 - x| - 1}{4} = \frac{|2x - 2| - 1}{2}$

(Μον.15)

B. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$1. \frac{x^2 + 6|x| + 9}{|x| + 3} = 5 \quad 2. \lambda(\lambda + 1)x = 5 + (\lambda - 1)x$$

(Μον.10)

Θέμα 3^ο:

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 + 2(\lambda - 2)x + \lambda = 0$ (1)

1. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση είναι 2^{ου} βαθμού ; **(Μον.5)**

2. Βρείτε τη διακρίνουσά της . **(Μον.5)**

3. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση :

α) έχει δύο ρίζες άνισες .

β) μία ρίζα διπλή .

γ) είναι αδύνατη .

(Μον.15)

Θέμα 4^ο:

A.1. Αν $\alpha \neq \beta$, να δείξετε ότι η εξίσωση

$$(\alpha^2 + \beta^2)x^2 + 2(\alpha + \beta)x + 2 = 0 \text{ είναι αδύνατη στο } \mathbb{R}. \quad \textbf{(Μον.10)}$$

2. Να εξετάσετε την περίπτωση που είναι $\alpha = \beta$ **(Μον.5)**

B. Να βρείτε το α ώστε η εξίσωση $(\alpha - 2)x^2 + (\alpha - 4)x - |\alpha| = 0$

να είναι 2^{ου} βαθμού και να έχει ρίζα το -1 . **(Μον.5)**

Γ. Σε μια εκδρομή τα παιδιά ήταν 5 λιγότερα από τους ενήλικες.

Οι ενήλικες πλήρωσαν συνολικά 1800€ και τα παιδιά 800€ .

Αν κάθε ενήλικας πλήρωσε 40€ περισσότερο από κάθε παιδί , πόσοι ενήλικες και πόσα παιδιά πήραν μέρος στην εκδρομή ;

(Μον.5)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

Θέμα 1^ο:

A. Θεωρία

B. 1Λ, 2Σ, 3Λ, 4Λ, 5Λ

Θέμα 2^ο:

A. 1. $x^2 - 5 \cdot x^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5 \cdot x \cdot x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$$x^2 - 5 = 0 \text{ ή } x = 0 \text{ ή } x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5 \text{ ή } x = 0 \text{ ή } x^2 = 6 \Leftrightarrow$$

$$x = \pm\sqrt{5} \text{ ή } x = 0 \text{ ή } x = \pm\sqrt{6}$$

2. $\frac{2x-2}{x^2-36} - \frac{x-2}{x^2-6x} = \frac{x-1}{x^2+6x} \Leftrightarrow$

$$\frac{2x-2}{(x-6)(x+6)} - \frac{x-2}{x(x-6)} - \frac{x-1}{x(x+6)} = 0 \quad (1)$$

Το Ε.Κ.Π των παρανομαστών είναι το $x(x-6)(x+6)$ οπότε πρέπει $x \neq 0$ και $x \neq 6$ και $x \neq -6$. Η (1) γίνεται :

$$x(2x-2) - (x-2)(x+6) - (x-1)(x-6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 2x - x^2 - 6x + 2x + 12 - x^2 + 6x + x - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$x = -6$ και λόγω των περιορισμών είναι αδύνατη.

3. $|x-1| - \frac{|1-x|-1}{4} = \frac{|2x-2|-1}{2} \Leftrightarrow |x-1| - \frac{|x-1|-1}{4} = \frac{2|x-1|-1}{2} \Leftrightarrow$

$$4|x-1| - |x-1| + 1 = 4|x-1| - 2 \Leftrightarrow -|x-1| = -3 \Leftrightarrow |x-1| = 3 \Leftrightarrow$$

$$x-1 = 3 \text{ ή } x-1 = -3 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ή } x = -2$$

B. 1. $\frac{x^2 + 6|x| + 9}{|x| + 3} = 5 \Leftrightarrow \frac{|x|^2 + 6|x| + 9}{|x| + 3} = 5 \Leftrightarrow \frac{|x| + 3^2}{|x| + 3} = 5 \Leftrightarrow$

$$|x| + 3 = 5 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

2. $\lambda(\lambda+1)x = 5 + (\lambda-1)x \Leftrightarrow (\lambda^2 + \lambda)x - (\lambda-1)x = 5 \Leftrightarrow$

$$(\lambda^2 + \lambda - \lambda + 1) \cdot x = 5 \Leftrightarrow (\lambda^2 + 1)x = 5 \text{ και επειδή } \lambda^2 + 1 > 0$$

είναι $x = \frac{5}{\lambda^2 + 1}$, μοναδική λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Θέμα 3^ο:

1) Η (1) είναι 2^ο βαθμού αν $\lambda - 1 \neq 0$ δηλ $\lambda \neq 1$.

$$2) \text{ Είναι } \Delta = 2(\lambda - 2)^2 - 4(\lambda - 1)\lambda = 4(\lambda - 2)^2 - 4(\lambda^2 - \lambda) = \\ = 4[(\lambda - 2)^2 - (\lambda^2 - \lambda)] = 4(\lambda^2 - 4\lambda + 4 - \lambda^2 + \lambda) = 4(-3\lambda + 4).$$

3) α) Η (1) έχει δύο ρίζες άνισες όταν $\Delta > 0$ δηλ

$$-3\lambda + 4 > 0 \Leftrightarrow -3\lambda > -4 \Leftrightarrow \lambda < \frac{4}{3} \text{ και } \lambda \neq 1 \text{ δηλ. } \lambda \in -\infty, 1 \cup \left(1, \frac{4}{3}\right)$$

β) Η (1) έχει διπλή ρίζα αν $\Delta = 0$, δηλ $-3\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow -3\lambda = -4 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{3}$

γ) Η (1) είναι αδύνατη αν $\Delta < 0$, δηλ. $-3\lambda + 4 < 0 \Leftrightarrow -3\lambda < -4 \Leftrightarrow \lambda > \frac{4}{3}$

Θέμα 4^ο:

A. 1) Αν $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = 0$ και $\beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και $\beta = 0$ κάτι που αποκλείεται γιατί $\alpha \neq \beta$. Η εξίσωση λοιπόν είναι 2^ο βαθμού. Για να είναι αδύνατη πρέπει $\Delta < 0$. Είναι :

$$\Delta = 2(\alpha + \beta)^2 - 4(\alpha^2 + \beta^2) \cdot 2 = 4(\alpha + \beta)^2 - 4(2\alpha^2 + 2\beta^2) = \\ = 4(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 2\alpha^2 - 2\beta^2) = 4(-\alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2) = \\ = -4(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) = -4(\alpha - \beta)^2 < 0, \text{ αφού } \alpha \neq \beta.$$

Άρα η εξίσωση πράγματι είναι αδύνατη.

2) • Αν $\alpha = \beta = 0$ η εξίσωση γίνεται $2 = 0$ και είναι επομένως αδύνατη

• Αν $\alpha = \beta \neq 0$ τότε $\Delta = -4(\alpha - \beta)^2 = 0$ και η εξίσωση έχει διπλή ρίζα

B. Η εξίσωση είναι 2^ο βαθμού αν $\alpha - 2 \neq 0$ δηλ $\alpha \neq 2$ (1).

Για να έχει ρίζα το -1 πρέπει να επαληθεύεται από αυτό, άρα

$$\text{πρέπει } \alpha - 2(-1)^2 + (\alpha - 4)(-1) - |\alpha| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha - 2 - \alpha + 4 - |\alpha| = 0 \Leftrightarrow |\alpha| = 2 \Leftrightarrow \alpha = \pm 2$$

Λόγω της (1) προκύπτει ότι $\alpha = -2$.

Γ. Αν x οι ενήλικες τότε πληρώνει καθένας $\frac{1800}{x}$ €, $x > 0$.

Τα $x-5$ παιδιά πληρώνουν το καθένα $\frac{800}{x-5}$ €, $x > 5$.

Κάθε ενήλικας πληρώνει 40€ περισσότερα, άρα

$$\frac{1800}{x} = \frac{800}{x-5} + 40 \Leftrightarrow 1800(x-5) = 800x + 40x(x-5) \Leftrightarrow$$

$$1800x - 9000 = 800x + 40x^2 - 200x \Leftrightarrow 40x^2 - 1200x + 9000 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 30x + 225 = 0 \Leftrightarrow (x-15)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 15.$$

Οι ενήλικες λοιπόν είναι **15** και τα παιδιά **10**.