ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

81

Ον/μο:……………….. **Α΄ Λυκείου**

Ύλη: Πράξεις-Διάταξη-Απόλυτα **11-11-12**

Θέμα 1ο:

Α. α) Τι ονομάζουμε ν-οστή δύναμη ενός πραγματικού αριθμού α; **(Μον.4)**

β) Συμπληρώστε τις ισότητες :

1. $\alpha^{\kappa}\cdot\alpha^{\lambda}=.......$ **2 .** $\alpha^{\kappa}\cdot\beta^{\kappa}=......$ **3.** $\dfrac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}}=......$

4. $(\alpha^{\kappa})^{\lambda}=......$ **5.** $\alpha^{-\nu}=.....$ **6.** $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\kappa}=.......$ **(Μον.6)**

Β. α) Τι ονομάζουμε ταυτότητα ; **(Μον.4)**

β) Συμπληρώστε τις ισότητες :

1. $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=.....$ **2.** $(\alpha-\beta)^3=......$

3. $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=.....$ **4.** $\alpha^2+\beta^2=.......$

5. $(\alpha+\beta+\gamma)^2=.......$ **6.** $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)=......$

(Μον.6)

Γ. Να σημειώσετε το (Σ) ή το (Λ) στις προτάσεις :

1. Αν $\alpha^2=\alpha\cdot\beta$ τότε α=β	**Σ**	**Λ**
2. Το γινόμενο δύο άρρητων αριθμών είναι άρρητος	**Σ**	**Λ**
3. Αν $\dfrac{\alpha}{\beta}>1$ τότε α>β	**Σ**	**Λ**
4. $4\alpha^2-20\alpha\beta+25\beta^2\geq 0$	**Σ**	**Λ**
5. Αν $10<\mathrm{x}<20$ τότε $\dfrac{\lvert \mathrm{x}-10\rvert}{\mathrm{x}-10}+\dfrac{\lvert \mathrm{x}-20\rvert}{\mathrm{x}-20}=0$	**Σ**	**Λ**
6. $\dfrac{\alpha}{\beta}>\dfrac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \alpha\cdot\delta>\beta\cdot\gamma$	**Σ**	**Λ**

7. $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha^{\nu} > \beta^{\nu}, \nu \in N$ **Σ Λ**

8. Μπορούμε να προσθέτουμε ανισότητες κατά μέλη **Σ Λ**

9. $|x^2 + y^2 + 2xy| = x^2 + y^2 + 2xy$ **Σ Λ**

10. $|x| \geq x$ **Σ Λ**

(Μον.5)

Θέμα 2^o:

Α. Αν οι αριθμοί $\alpha - \frac{1}{2}$ και $\beta - 2$ είναι αντίστροφοι να δείξετε ότι :

1) $4\alpha + \beta = 2\alpha\beta$ **(Μον.6)**

2) Οι αριθμοί $x = \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{4}$ και $y = \alpha \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{2}\right) + \frac{\beta}{2}$ είναι αντίθετοι . **(Μον.7)**

Β. Αν α, β, γ, δ με τη σειρά που δίνονται , είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί να δείξετε ότι :

1) $\beta \cdot \gamma - \alpha \cdot \delta = 2$

2) $\beta \cdot \delta - \alpha \cdot \gamma$ περιττός

3) $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ άρτιος αλλά όχι πολ/σιο του 4

(Μον.12)

Θέμα 3^o:

Α.1) Αν $2 < x < 8$ να απλοποιήσετε από τις απόλυτες τιμές την παράσταση $A = 5 \cdot |x - 1| - 3|x - 9| + 4|x + 2| + 5|x - 10|$ **(Μον.5)**

2) Μεταξύ ποιών αριθμών περιέχεται η τιμή της παράστασης Α ; **(Μον.5)**

Β. Αν $0 < \alpha < \beta$ να αποδείξετε ότι :

1. $\frac{\alpha}{1+\alpha} < \frac{\beta}{1+\beta}$ **2.** $\frac{\alpha}{1+\alpha} < \frac{\alpha+\beta}{1+\beta}$

3. $\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta} < \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\beta}{1+\beta}$

(Μον.15)

Θέμα 4^ο^:

Α. Αν $\alpha+\beta=-2$ και $\alpha\beta=-3$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις

1) $\alpha^2+\beta^2$ **2)** $\alpha^3+\beta^3$ **3)** $\alpha^4+\beta^4$ **(Μον.12)**

Β. Να συγκριθούν οι αριθμοί $\alpha=2^{450}$ και $\beta=3^{300}$ **(Μον.5)**

Γ. Αν $4x^2+y^2+\omega^2-4x+2y+2\leq 0$ βρείτε τους x,y,ω. **(Μον.4)**

Δ. Αν $\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_\nu\in R$ και $\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3...\alpha_\nu<1$ τότε ένας τουλάχιστον από τους $\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_\nu$ είναι μικρότερος του 1 **(Μον.4)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

Θέμα 1ο:

Α.α) Ονομάζουμε ν-οστή δύναμη ενός πραγματικού αριθμού α , το γινόμενο ν παραγόντων του α δηλ.

- $\alpha^{\nu}=\alpha\cdot\alpha....\alpha$ (ν παράγοντες) για ν>1 και
- $\alpha^{1}=\alpha$ για ν=1

Αν επιπλέον είναι $\alpha\neq 0$, ορίζουμε ότι :

- $\alpha^{0}=1$ και $\alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha}$

β) **1.** $\alpha^{\kappa}\cdot\alpha^{\lambda}=\alpha^{\kappa+\lambda}$ **2.** $\alpha^{\kappa}\cdot\beta^{\kappa}=(\alpha\cdot\beta)^{\kappa}$ **3.** $\frac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$

4. $(\alpha^{\kappa})^{\lambda}=\alpha^{\kappa\cdot\lambda}$ **5.** $\alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^{\nu}}$ **6.** $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\kappa}=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\kappa}$

Β. α) Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών .

β) **1.** $\alpha^{2}-2\alpha\beta+\beta^{2}=(\alpha-\beta)^{2}$

2. $\left(\alpha-\beta\right)^{3}=\alpha^{3}-3\alpha^{2}\beta+3\alpha\beta^{2}-\beta^{3}$

3. $(\alpha+\beta)(\alpha^{2}-\alpha\beta+\beta^{2})=\alpha^{3}+\beta^{3}$

4. $\alpha^{2}+\beta^{2}=(\alpha+\beta)^{2}-2\alpha\beta$

5. $(\alpha+\beta+\gamma)^{2}=\alpha^{2}+\beta^{2}+\gamma^{2}+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\alpha\gamma$

6. $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^{2}-\beta^{2}$

Γ. 1Λ , 2Λ , 3Σ , 4Σ , 5Σ , 6Λ , 7Λ , 8Λ , 9Σ , 10Σ

<u>Θέμα 2ο:</u>

Α. 1) Αφού οι $\alpha-\frac{1}{2}$ και β-2 είναι αντίστροφοι θα ισχύει ότι

$\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\cdot(\beta-2)=1$ δηλ. $\alpha\beta-2\alpha-\frac{\beta}{2}+1=1\Leftrightarrow$

$2\alpha\beta-4\alpha-\beta=0\Leftrightarrow 4\alpha+\beta=2\alpha\beta$

2) Είναι $x+y=\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{4}+\alpha\left(\frac{1}{2}-\frac{\beta}{2}\right)+\frac{\beta}{2}=\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{4}+\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha\beta}{2}+\frac{\beta}{2}=$

$=\frac{2\alpha-\beta+2\alpha-2\alpha\beta+2\beta}{4}=\frac{4\alpha+\beta-2\alpha\beta}{4}\overset{(1)}{=}\frac{0}{4}=0$

άρα οι x , y είναι αντίθετοι .

Β. Οι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί α , β , γ , δ γράφονται α , α+1 , α+2 , α+3 , οπότε :

1) $\beta\gamma-\alpha\delta=(\alpha+1)(\alpha+2)-\alpha(\alpha+3)=\alpha^2+2\alpha+\alpha+2-\alpha^2-3\alpha=2$

2) $\beta\delta-\alpha\gamma=(\alpha+1)(\alpha+3)-\alpha(\alpha+2)=\alpha^2+3\alpha+\alpha+3-\alpha^2-2\alpha=$

$=2\alpha+3=2\alpha+2+1=2(\alpha+1)+1=2\rho+1$, περιττός .

3) $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\alpha+\alpha+1+\alpha+2+\alpha+3=4\alpha+6=4\alpha+4+2=$

= 4(α+1)+2=4λ+2 δηλ άρτιος αλλά όχι πολ/σιο του 4

<u>Θέμα 3ο:</u>

Α. 1) Αφού $2<x<8$ είναι $x-1>0$, $x-9<0$, $x+2>0$ και $x-10<0$. Η παράσταση Α γράφεται :

$A=5(x-1)-3(-x+9)+4(x+2)+5(-x+10)=$

$=5x-5+3x-27+4x+8-5x+50=7x+26$

2) είναι $2<x<8\Rightarrow 14<7x<56\Rightarrow 40<7x+26<82$

Δηλ. 40<Α<82

Β. 1) Θ.δ.ο $\frac{\alpha}{1+\alpha}<\frac{\beta}{1+\beta}\Leftrightarrow\alpha(1+\beta)<\beta(1+\alpha)\Leftrightarrow$

$\alpha+\alpha\beta<\beta+\alpha\beta\Leftrightarrow\alpha<\beta$, που ισχύει .

2) είναι : $\frac{\alpha}{1+\alpha}<\frac{\beta}{1+\beta}(\alpha\pi\acute{o}\quad 1)<\frac{\alpha+\beta}{1+\beta}$

3) είναι : $\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta}=\frac{\alpha}{1+\alpha+\beta}+\frac{\beta}{1+\alpha+\beta}<\frac{\alpha}{1+\alpha}+\frac{\beta}{1+\beta}$

Θέμα 4ο:

Α. 1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2(-3)=4+6=10$

2) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=(\alpha+\beta)\cdot\left[(\alpha^2+\beta^2)-\alpha\beta\right]=$

$=(-2)\cdot[10-(-3)]=(-2)\cdot 13=-26$

3) $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2)^2+(\beta^2)^2=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=10^2-2(-3)^2=$
$=100-18=82$

Β. Είναι : $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{2^{450}}{3^{300}}=\dfrac{(2^3)^{150}}{(3^2)^{150}}=\dfrac{8^{150}}{9^{150}}=\left(\dfrac{8}{9}\right)^{150}<1$

άρα $\alpha<\beta$.

Γ. Έχουμε : $4x^2+y^2+\omega^2-4x+2y+2\le 0\Leftrightarrow$

$(4x^2-4x)+(y^2+2y)+\omega^2+2\le 0\Leftrightarrow$

$\left(4x^2-4x+1\right)+\left(y^2+2y+1\right)+\omega^2\le 0\Leftrightarrow$

$(2x-1)^2+(y+1)^2+\omega^2\le 0\Leftrightarrow$

$(2x-1)^2+(y+1)^2+\omega^2=0\Leftrightarrow$

$(2x-1)^2=0$ και $\left(y+1\right)^2=0$ και $\omega^2=0\Leftrightarrow$

$x=\dfrac{1}{2}$ και $y=-1$ και $\omega=0$

Δ. Έστω ότι όλοι είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 1 . Τότε :

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1\ge 1\\ \alpha_2\ge 2\\ \ldots\ldots\\ \ldots\ldots\\ \ldots\ldots\\ \alpha_\nu\ge 1\end{array}\right\}\overset{(\cdot)}{\Rightarrow}\alpha_1\cdot\alpha_2\ldots\alpha_\nu\ge 1$$, άτοπο γιατί $\alpha_1\cdot\alpha_2\ldots\alpha_\nu<1$

Άρα ένας τουλάχιστον είναι μικρότερος του 1.