ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 78

Ον/μο:……………….. **Α΄ Λυκείου**

Ύλη: Όλη **06-05-12**

Θέμα 1ο:

Α. Τι ονομάζεται ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α;

(Μον. 5)

Β. Αν $\alpha,\beta \geq 0$ να αποδείξετε ότι $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}$ **(Μον.10)**

Γ. Να ορίσετε ως (Σ) η (Λ) τις προτάσεις :

1. Αν $A \subseteq B$ τότε $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ **Σ Λ**

2. $\sqrt{\alpha^2}=\sqrt{\alpha}^2$, $\alpha \in R$ **Σ Λ**

3. Η εξίσωση $5 \cdot x = 0$ έχει μοναδική λύση την x=0 **Σ Λ**

4. Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, ν άρτιος , α<0 , είναι αδύνατη **Σ Λ**

5. Αν $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$ τότε $\alpha\cdot\beta \geq 0$ **Σ Λ**

6. Η C_f συνάρτησης f τέμνει τον y΄y σε περισσότερα του ενός σημεία . **Σ Λ**

7. Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ τότε $\alpha_1=\alpha_2$ **Σ Λ**

8. Αν α>0 και Δ<0 τότε η παραβολή $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ είναι πάνω από τον x΄x **Σ Λ**

9. Αν P(A) λύση της εξίσωσης $P^2(A)-3P(A)+2=0$ τότε Α=Ω **Σ Λ**

10. Η ακολουθία $\alpha_\nu = 3\cdot 2^{\nu-1}$ είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ=2 **Σ Λ**

(Μον.10)

Θέμα 2ο:

Α .Κάνουμε το εξής πείραμα : σκεφτόμαστε ένα μονοψήφιο ακέραιο αριθμό διαφορετικό του μηδενός και τον υψώνουμε στο τετράγωνο .Να βρεθεί η πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων :

Α: Ο αριθμός που προκύπτει έχει τελευταίο ψηφίο το 6

Β: Ο αριθμός που προκύπτει έχει τελευταίο ψηφίο το 9.

Γ: Ο αριθμός που προκύπτει έχει τελευταίο ψηφίο το 6 ή το 9

(Μον.12)

B. Σε μια ακολουθία $(α_ν)$ είναι $S_ν = 2ν^2 + 7ν, \quad ν \in N$

α) Να αποδείξετε ότι $α_ν=4ν+5$ **(Μον.5)**

β) Να αποδείξετε ότι η $(α_ν)$ είναι αριθμητική πρόοδος **(Μον.4)**

γ) Να βρείτε το άθροισμα $S = α_{21} + α_{22} + ... + α_{30}$ **(Μον.4)**

<u>Θέμα 3ο:</u>

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = 6x^2 - x - 2, \quad x \in R$

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$ **(Μον.3)**

β) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου . **(Μον.6)**

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$A(x) = \frac{f(x)}{1-4x^2}, \quad x \neq \pm\frac{1}{2}$$ **(Μον.5)**

δ) Να λύσετε την εξίσωση $|A(x)| = 1$ **(Μον.6)**

ε) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_g της
$g(x) = \sqrt{A(x)} - 1$ βρίσκεται πάνω από τον x΄x **(Μον.5)**

<u>Θέμα 4ο</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - (λ+1)x + (κ^2 - 2κ), \quad κ, λ \in R$

Γνωρίζουμε ότι για x=1 η f έχει ελάχιστο το -3 .

α) Να βρείτε τα κ και λ **(Μον.5)**

β) Αν κ=1 και λ=3 , τότε :

i) Να λύσετε την εξίσωση $|f(x) - 2x^2| = 2x^2 - f(x)$

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g με
$g(x) = \sqrt{x^2 - f(x) + 4}$

iii) Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f

iv) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η C_g τέμνει τους άξονες .

v) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την κορυφή της παραβολής f(x) και το σημείο που η C_g τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox

(Μον.20)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

Θέμα 1^o:

Α. Θεωρία **Β.** Θεωρία

Γ. 1Σ , 2Λ , 3Σ , 4Σ , 5Σ , 6Λ , 7Λ , 8Σ , 9Σ , 10Σ

Θέμα 2^o:

Α. Ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega=\{\pm1,\pm2,.....,\pm9\}$ με N(Ω)=18 .

- Είναι $A=\{\pm4,\pm6\}$ άρα $P(A)=\frac{4}{18}=\frac{2}{9}$
- Είναι $B=\{\pm3,\pm7\}$ άρα $P(B)=\frac{4}{18}=\frac{2}{9}$
- Είναι $\Gamma=A\cup B=\{\pm4,\pm6,\pm3,\pm7\}$ άρα $P(\Gamma)=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$

Β. α) Είναι $\alpha_\nu=S_\nu-S_{\nu-1}=(2\nu^2+7\nu)-\left[2(\nu-1)^2+7(\nu-1)\right]=$

$= 2\nu^2+7\nu-\left[2(\nu^2-2\nu+1)+7\nu-7\right]=$

$=2\nu^2+7\nu-(2\nu^2-4\nu+2+7\nu-7)=$

$= 2\nu^2+7\nu-2\nu^2+4\nu-2-7\nu+7$

δηλ $\alpha_\nu=4\nu+5$.

β) Είναι $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=\left[4(\nu+1)+5\right]-(4\nu+5)=$

$=4\nu+4+5-4\nu-5$ δηλ $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=4$ οπότε ω=4

γ) $S=S_{30}-S_{20}=(2\cdot30^2+7\cdot30)-(2\cdot20^2+7\cdot20)=$

=(1800-210)-(800+140)=2010-940 δηλ $S=1070$.

Θέμα 3^o:

α). Το τριώνυμο έχει $\Delta=(-1)^2-4\cdot6\cdot(-2)=1+48=49$

και ρίζες $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{49}}{2\cdot6}=\frac{1\pm7}{12}$

Η εξίσωση $f(x)=0$ λοιπόν έχει ρίζες $x_1=\frac{2}{3},\quad x_2=-\frac{1}{2}$

β) Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον πίνακα :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

γ) έχουμε : $A(x)=\dfrac{f(x)}{1-4x^2}=\dfrac{6x^2-x-2}{1-4x}=\dfrac{6\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)}{(1-2x)(1+2x)}=$

$$=\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot 3\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)}{(1-2x)(1+2x)}=\frac{(2x+1)\cdot(3x-2)}{(1-2x)(1+2x)}=\frac{3x-2}{1-2x}$$

δ) Η εξίσωση $|A(x)|=1$ γράφεται $\left|\dfrac{3x-2}{1-2x}\right|=1\Leftrightarrow\dfrac{|3x-2|}{|1-2x|}=1\Leftrightarrow$

$|3x-2|=|1-2x|\Leftrightarrow 3x-2=1-2x$ ή $3x-2=-1+2x\Leftrightarrow$

$5x=3$ ή $x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{5}$ ή $x=1$.

ε) Κατ'αρχάς πρέπει $A(x)\geq 0$ δηλ $\dfrac{3x-2}{1-2x}\geq 0\Leftrightarrow(3x-2)(1-2x)\geq 0$

$\overset{\varepsilon\tau\varepsilon\rho}{\Leftrightarrow}\dfrac{1}{2}\leq x\leq\dfrac{2}{3}$ και λόγω περιορισμών $\underline{\dfrac{1}{2}<x\leq\dfrac{2}{3}}$ (1)

Η C_g είναι πάνω από τον $x'x$ αν $g(x)>0$ δηλ .

$\sqrt{A(x)}-1>0\Leftrightarrow\sqrt{A(x)}>1\Leftrightarrow A(x)>1\Leftrightarrow\dfrac{3x-2}{1-2x}>1\Leftrightarrow$

$\dfrac{3x-2}{1-2x}-1>0\Leftrightarrow\dfrac{3x-2-1+2x}{1-2x}>0\Leftrightarrow\dfrac{5x-3}{1-2x}>0\Leftrightarrow$

$(5x-3)(1-2x)>0\overset{\varepsilon\tau\varepsilon\rho}{\Leftrightarrow}\underline{\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{5}}$ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $\underline{\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{5}}$.

Θέμα 4ο:

α) Αφού x=1 το τριώνυμο έχει ελάχιστο θα είναι

$$-\frac{\beta}{2\alpha}=1 \Leftrightarrow -\frac{-(\lambda+1)}{2\cdot 2}=1 \Leftrightarrow \lambda+1=4 \Leftrightarrow \underline{\lambda=3}$$

Αφού το ελάχιστο είναι το -3 θα είναι $-\frac{\Delta}{4\alpha}=-3$ δηλ

$$\frac{(\lambda+1)^2-4\cdot 2\cdot(\kappa^2-2\kappa)}{4\cdot 2}=3 \Leftrightarrow \frac{16-8(\kappa^2-2\kappa)}{8}=3 \Leftrightarrow$$

$$2-(\kappa^2-2\kappa)=3 \Leftrightarrow \kappa^2-2\kappa+1=0 \Leftrightarrow (\kappa-1)^2=0 \Leftrightarrow \underline{\kappa=1}$$

β) Για κ=1 και λ=3 είναι $f(x)=2x^2-4x-1$

i) Η εξίσωση $\left|f(x)-2x^2\right|=2x^2-f(x) \Leftrightarrow f(x)-2x^2\le 0 \Leftrightarrow$

$$2x^2-4x-1-2x^2\le 0 \Leftrightarrow 4x+1\ge 0 \Leftrightarrow 4x+1\ge 0 \Leftrightarrow 4x\ge -1 \Leftrightarrow$$

$$\underline{x\ge -\frac{1}{4}}$$

ii) Πρέπει $x^2-f(x)+4\ge 0 \Leftrightarrow x^2-2x^2+4x+1+4\ge 0 \Leftrightarrow$

$$-x^2+4x+5\ge 0 \Leftrightarrow x^2-4x-5\le 0 \overset{\varepsilon\tau\varepsilon\rho}{\Leftrightarrow} -1\le x\le 5 \text{ άρα } \underline{A_g=[-1,5]}$$

iii) ● Στο $\left(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}\right]=(-\infty,1]$ είναι γνησίως φθίνουσα

● Στο $\left[-\frac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)=[1,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα .

iv) έχουμε την $g(x)=\sqrt{x^2-f(x)+4}=\sqrt{-x^2+4x+5}$

●Για x=0 $\Rightarrow g(0)=\sqrt{5}$ άρα η C_g τέμνει τον y΄y στο $K(0,\sqrt{5})$

● Για y=0 $\Rightarrow g(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+4x+5=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=5$
άρα η C_g τέμνει τον x΄x στα Λ(-1,0) και Μ(5,0)

v) Η κορυφή της παραβολής $O'\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ είναι η Ο΄(1,-3) .

Το σημείο που η C_g τέμνει τον Οx είναι το Μ(5,0) .Ο συντελεστής διευθύνσεως της Ο΄Μ=$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-(-3)}{5-1}=\frac{3}{4}$ άρα έχει εξίσωση

$y=\frac{3}{4}x+\beta$. Το σημείο Μ(5,0) την επαληθεύει

άρα $\frac{3}{4}\cdot 5+\beta=0 \Leftrightarrow 15+4\beta=0 \Leftrightarrow \beta=-\frac{15}{4}$.Άρα η Ο΄Μ έχει

εξίσωση ε: $y=\frac{3}{4}x-\frac{15}{4}$