ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ

Ον/μο:......................... **Γ΄Λυκείου**

Ύλη: Ταλαντώσεις-Κρούσεις **11-10-2015**

Θέμα 1ο:

1. Δύο ίδιες σφαίρες μάζας m κατευθυνόμενες η μία προς την άλλη με αντίθετες ταχύτητες μέτρου υ, συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Μετά την κρούση:

α) οι σφαίρες θα ακινητοποιηθούν.

β) η μία σφαίρα θα ακινητοποιηθεί και η άλλη θα κινηθεί με ταχύτητα μέτρου U.

γ) οι σφαίρες θα απομακρυνθούν με ταχύτητες ίδιου μέτρου.

δ) η συνολική κινητική ενέργεια των δύο σφαιρών θα μηδενιστεί.

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. **(Μονάδες 5)**

2. Ένα σώμα μάζας m είναι δεμένο σε οριζόντιο ελατήριο σταθεράς k και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα f και μέγιστη κινητική ενέργεια K_{max}. Διπλασιάζουμε τη συχνότητα της ταλάντωσης χωρίς να μεταβάλλουμε τη μάζα του σώματος και το πλάτος της ταλάντωσης. Η μέγιστη κινητική ενέργεια της ταλάντωσης γίνεται ίση με :

α) $K_{max}/2$ **β)** K_{max} **γ)** $2K_{max}$ **δ)** $4K_{max}$

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. **(Μονάδες 5)**

3. Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση περιόδου Τ και την χρονική στιγμή t=0 βρίσκεται στην ακραία αρνητική του απομάκρυνση. Μετά από χρόνο t_1= T/2, το σώμα:

α) περνά από την θέση ισορροπίας του για δεύτερη φορά.

β) έχει αρνητική επιτάχυνση.

γ) έχει μέγιστη κινητική ενέργεια.

δ) έχει μέγιστη ταχύτητα για τρίτη φορά.

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. **(Μονάδες 5)**

4. Όταν δύο σώματα διαφορετικής μάζας συγκρούονται μετωπικά και ελαστικά:

α) η ορμή και η μηχανική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων που συγκρούονται διατηρείται.

β) ανταλλάσουν ταχύτητες.

γ) οι ορμές τους μετά την κρούση είναι πάντοτε αντίθετες.

δ) συμβαίνει μόνιμη παραμόρφωση του σχήματος των σωμάτων που συγκρούονται.

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. **(Μονάδες 5)**

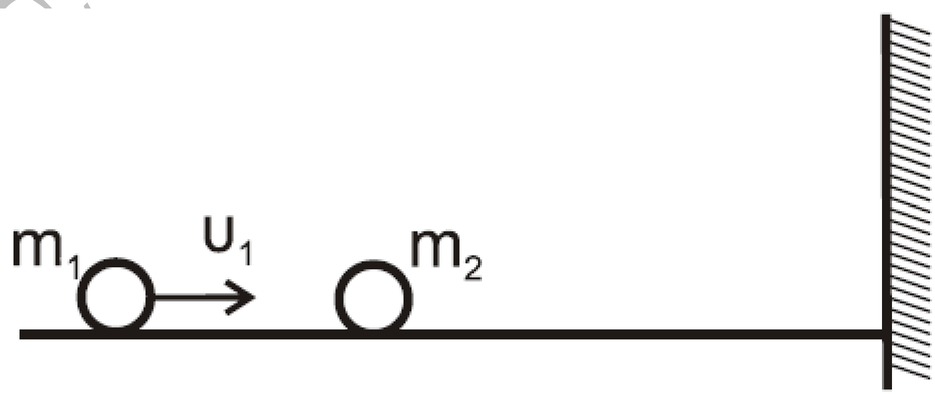
5) Ένα σώμα μάζας m που είναι προσδεμένο σε οριζόντιο ελατήριο σταθεράς k, όταν απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας κατά Α, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με ενέργεια ταλάντωσης Ε. Αν απομακρύνουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας κατά 2Α, θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση με ενέργεια ταλάντωσης:

α) Ε **β)** 2Ε **γ)** Ε/2 **δ)** 4Ε

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. **(Μονάδες 5)**

<u>Θέμα 2^{ο}:</u>

1. Σε λείο οριζόντιο επίπεδο και σε διεύθυνση κάθετη σε κατακόρυφο τοίχο κινείται σφαίρα μάζας m_1 με ταχύτητα μέτρου $υ_1$. Κάποια χρονική στιγμή η σφαίρα μάζας m_1 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα μάζας m_2 (m_2 > m_1). Μετά την κρούση με τη μάζα m_1, η m_2 συγκρούεται ελαστικά με τον τοίχο.



Παρατηρούμε ότι η απόσταση των μαζών m_1 και m_2, μετά την κρούση της m_2 με τον τοίχο, παραμένει σταθερή. Ο λόγος των μαζών m_1 / m_2 είναι:

ι) 3 **ιι)** 1 **ιιι)** 1/3

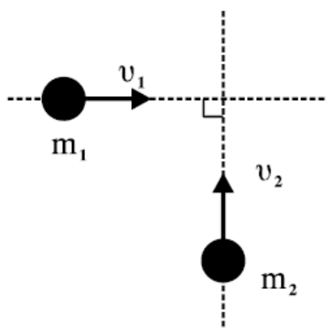
α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. **(Μονάδες 2)**
β) Να δικαιολογήσετε την απάντητση σας. **(Μονάδες 7)**

2. Ένα σώμα μάζας m είναι δεμένο στην ελεύθερη άκρη κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k και ηρεμεί στη θέση ισορροπίας. Απομακρύνουμε το σώμα προς τα κάτω κατά A και το αφήνουμε ελεύθερο. Το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Αντικαθιστούμε το ελατήριο με άλλο, σταθεράς 2k, χωρίς να αλλάξουμε το αναρτημένο σώμα. Απομακρύνουμε το σώμα προς τα κάτω από τη νέα θέση ισορροπίας κατά A και το αφήνουμε ελεύθερο. Το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Ο λόγος $\frac{a_{max,1}}{a_{max,2}}$ των μέτρων των μεγίστων επιταχύνσεων των δύο ταλαντώσεων είναι ίσος με:

ι) 2 **ιι)** 1 **ιιι)** $\frac{1}{2}$

α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. **(Μονάδες 2)**
β) Να δικαιολογήσετε την απάντητση σας. **(Μονάδες 6)**

3. Δύο σώματα με μάζες $m_1 = m_2 = 2kg$ κινούνται χωρίς τριβές στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και σε κάθετες διευθύνσεις με ταχύτητες $U_1=U_2=\sqrt{2}$ m/s (όπως στο σχήμα) και συγκρούονται πλαστικά. Η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος είναι:

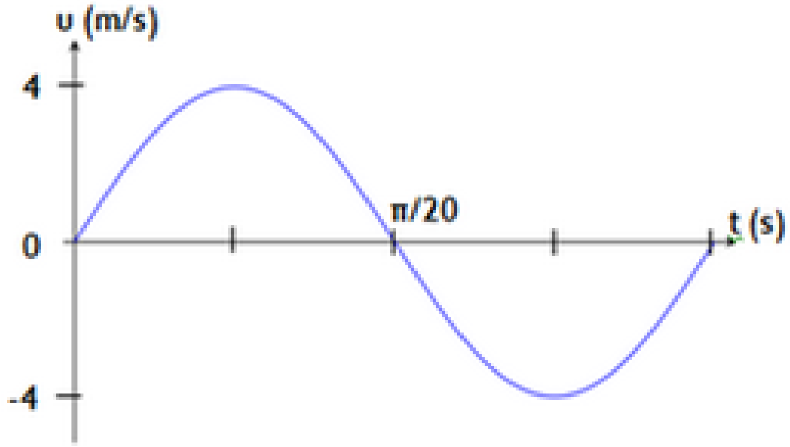


ι) 2J **ιι)** 4J **ιιι)** 8J

α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. **(Μονάδες 2)**
β) Να δικαιολογήσετε την απάντητση σας. **(Μονάδες 6)**

Θέμα 3^o:

Ένα σώμα μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους Α. Η ενέργεια της ταλάντωσης είναι Ε=0,8 J. Η γραφική παράσταση της ταχύτητας U του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο t απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:



α) Να υπολογίσετε την αρχική φάση φ_0 και το πλάτος Α της ταλάντωσης.

β) Να υπολογίσετε την σταθερά επαναφοράς D της ταλάντωσης.

γ) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις απομάκρυνσης – χρόνου (x = f(t)) και επιτάχυνσης – χρόνου (α = f(t)) στο χρονικό διάστημα από $t_0 = 0$ έως t = T.

δ) Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος την χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{40}$ s. **(Μονάδες 25)**

Θέμα 4^o:

Ένα σώμα Σ_1 μάζας m_1 = 3kg είναι στερεωμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k = 576 N/m, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο ακλόνητα. Το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $\frac{\sqrt{12}}{12}$ πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα συγκρούεται πλαστικά με ακίνητο σώμα Σ_2, μάζας m_2 = 1kg και το σύστημα συνεχίζει να ταλαντώνεται.

α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

β) Να γράψετε τη συνάρτηση που περιγράφει την απομάκρυνση σε σχέση με το χρόνο για τη νέα ταλάντωση. Να θεωρήσετε ως t = 0 τη στιγμή της σύγκρουσης.

γ) Να γράψετε τη συνάρτηση που περιγράφει τη δύναμη επαναφοράς σε σχέση με την απομάκρυνση για τη νέα ταλάντωση και να τη σχεδιάσετε σε αριθμημένους άξονες.

δ) Να υπολογίσετε για τη νέα ταλάντωση το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας, τη χρονική στιγμή που το συσσωμάτωμα βρίσκεται σε θετική απομάκρυνση, πλησιάζει προς τη θέση ισορροπίας και η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης με την κινητική συνδέονται με τη σχέση $U = \frac{K}{15}$. **(Μονάδες 25)**

Απαντήσεις

Θέμα 1ο:

1) γ **2)** δ **3)** β **4)** α **5)** δ

Θέμα 2ο:

1) 1η κρούση με ακίνητο το m_2

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot \upsilon_1 \quad \kappa' \quad \upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot \upsilon_1$$

2η κρούση με τοίχο (σώμα πολύ μεγάλης μάζας)

άρα $\upsilon_2'' = -\upsilon'_2 = \dfrac{-2m_1}{m_1 + m_2} \cdot \upsilon_1$

πρέπει $\upsilon_1' = \upsilon_2''$ για να είναι σταθερή η απόσταση

άρα $\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot \upsilon_1 = \dfrac{-2m_1}{m_1 + m_2} \cdot \upsilon_1$

άρα $m_1 - m_2 = -2m_1$

$3m_1 = m_2$

$\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{1}{3}$. Σωστή η (iii)

2) Η μέγιστη επιτάχυνση δίνεται από τον τύπο: $a_{\max} = \omega^2 A$.

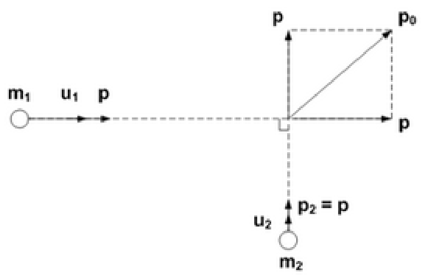
Επειδή $D = k = m\omega^2$ έχουμε: $k = m\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \dfrac{k}{m}$

Με αντικατάσταση στο λόγο $\dfrac{a_{\max,1}}{a_{\max,2}}$ των μέτρων των μεγίστων επιταχύνσεων των δύο ταλαντώσεων, έχουμε:

$$\frac{a_{\max,1}}{a_{\max,2}} = \frac{\omega_1{}^2 A}{\omega_2{}^2 A} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{\max,1}}{a_{\max,2}} = \frac{\frac{k}{m}}{\frac{2k}{m}} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{\max,1}}{a_{\max,2}} = \frac{k}{2k} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{\max,1}}{a_{\max,2}} = \frac{1}{2}$$

Σωστή η (ιι)

3) Για την κρούση ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής, οπότε: $\vec{p}_{A\rho\chi} = \vec{p}_{T\epsilon\lambda}$. Το μέτρο της ολικής ορμής, p_0, του συστήματος πριν την κρούση είναι $p_o = \sqrt{p^2 + p^2} = \sqrt{2}p$.



Άρα, $p_{τελ.} = \sqrt{2}p = \sqrt{2}\cdot m_1U_1 = \sqrt{2}\cdot m_2U_2 = \sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} = 4kg\cdot m/s$

$p_{τελ.} = (m_1+m_2)U_{συσ}$ ή

$U_{συσ} = 1m/s$

Οπότε η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος είναι:

$K=\frac{1}{2}(m_1+m_2){U_{συσ}}^2 = 2J$

Σωστή η (ι)

Θέμα 3ο:

Από το σχήμα εξάγουμε τις εξής πληροφορίες:

- $\upsilon_{\max} = 4\ \dfrac{m}{s}$
- $\dfrac{T}{2} = \dfrac{\pi}{20}\ s \Rightarrow T = \dfrac{\pi}{10}\ s$
- Για $t = 0\ \rightarrow\ \upsilon = 0$, δηλαδή το σώμα βρίσκεται σε ακραία θέση.

Αμέσως μετά τη στιγμή $t = 0\ \rightarrow\ \upsilon > 0$, άρα το σώμα τη στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στην αρνητική ακραία θέση ($x = -A$).

Θέτοντας $t = 0$ και $x = -A$ στην εξίσωση $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ της απλής αρμονικής ταλάντωσης, βρίσκουμε την αρχική φάση της ταλάντωσης:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow -A = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = -1 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}\ rad$$

επειδή $0 < \phi_0 < 2\pi$

α) Από τον τύπο $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ υπολογίζουμε τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 20\ \frac{rad}{s}$$

Από τον τύπο $\upsilon_{\max} = \omega A$ υπολογίζουμε το πλάτος της ταλάντωσης:

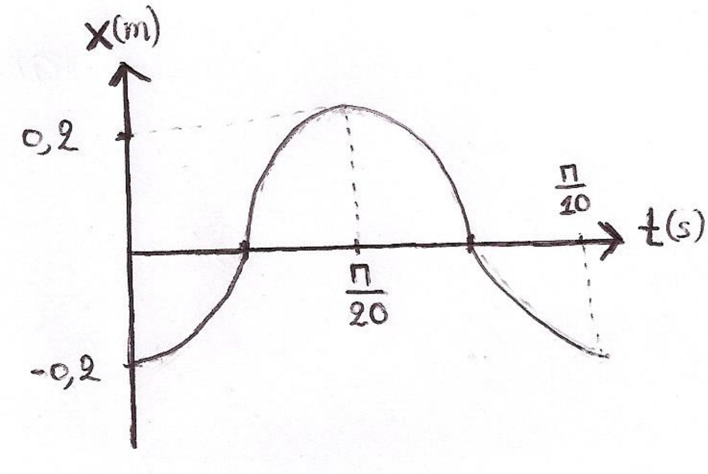
$$\upsilon_{\max} = \omega A \Rightarrow \quad A = 0,2\ m$$

β) Από τον τύπο $E = \dfrac{1}{2}DA^2$ υπολογίζουμε τη σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow D = \frac{2E}{A^2} \Rightarrow \quad D = 40\ \frac{N}{m}$$

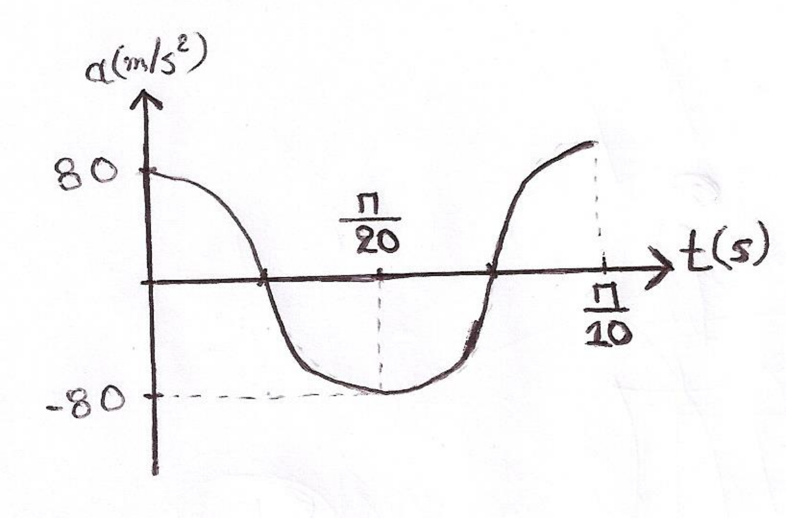
γ) Διάγραμμα x = f(t)

πλάτος: A = 0,2 m



Διάγραμμα α = f(t)

μέτρο μέγιστης επιτάχυνσης: $\alpha_{max} = \omega^2 A = 80\ m/s^2$



δ) Σύμφωνα με το 2ο Νόμο Newton, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ισούται με τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα:

$$\Sigma F = \frac{dp}{dt}.$$

Στην απλή αρμονική ταλάντωση, η συνισταμένη δύναμη δίνεται από τον τύπο $\Sigma F = -Dx$, επομένως:

$$\frac{dp}{dt} = -Dx$$

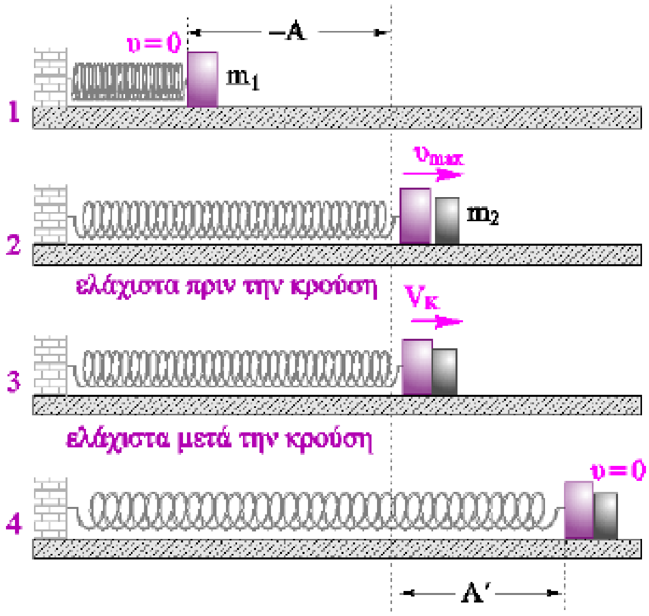
Βρίσκουμε την απομάκρυνση x του σώματος από τη θέση ισορροπίας τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{40}\ s$:

$$x = 0,2\eta\mu(20t + \frac{3\pi}{2})\,m \Rightarrow x = 0,2\eta\mu(\frac{20\pi}{40} + \frac{3\pi}{2})\,m \Rightarrow x = 0$$

Με αντικατάσταση προκύπτει: $\frac{dp}{dt} = 0$

Θεμα 4ο:

α)



Για τη σύγκρουση των δύο σωμάτων ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής.

$$m_1 \cdot \upsilon_1 + m_2 \cdot 0 = (m_1 + m_2)V_\kappa \quad (1)$$

Η σύγκρουση γίνεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, οπότε η ταχύτητα υ_1 δηλώνει τη μέγιστη ταχύτητα της αρχικής ταλάντωσης, $\upsilon_1 = \upsilon_{max}$. Από τη διατήρηση της ενέργειας, για την αρχική ταλάντωση, μεταξύ της θέσης ισορροπίας και της ακραίας θέσης, βρίσκουμε τη υ_{max}.

$$K_2 = U_1 \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow \upsilon_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \sqrt{\frac{576N/m}{3kg}} \cdot \frac{\sqrt{12}}{12}m \Rightarrow \upsilon_{max} = 4\frac{m}{s}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$V_\kappa = \frac{m_1 \cdot \upsilon_1}{m_1 + m_2} = \frac{3kg \cdot 4m/s}{3kg + 1kg} \Rightarrow V_\kappa = 3\frac{m}{s}$$

β) Η ζητούμενη σχέση στη γενική της μορφή γράφεται:

$$x = A' \cdot \eta\mu(\omega' t + \varphi_0) \quad (2)$$

Πρέπει να υπολογίσουμε τα A', ω', φ_0.

Επειδή το σύστημα ταλαντώνεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, η θέση ισορροπίας της νέας ταλάντωσης παραμένει ίδια με την παλιά, οπότε τη χρονική στιγμή $t = 0$ το συσσωμάτωμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του και έχει θετική ταχύτητα.

Αυτό μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι:

- η νέα ταλάντωση δεν έχει αρχική φάση, $\varphi_0 = 0$

- η ταχύτητα του συσσωματώματος, $V_\kappa = 3m/s$, αποτελεί τη μέγιστη ταχύτητα της νέας ταλάντωσης.

Η γωνιακή συχνότητα της νέας ταλάντωσης είναι:

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{576\ N/m}{3kg + 1kg}} \Rightarrow \omega' = 12\frac{rad}{s}$$

Από τη σχέση της μέγιστης ταχύτητας βρίσκουμε το πλάτος της νέας ταλάντωσης:

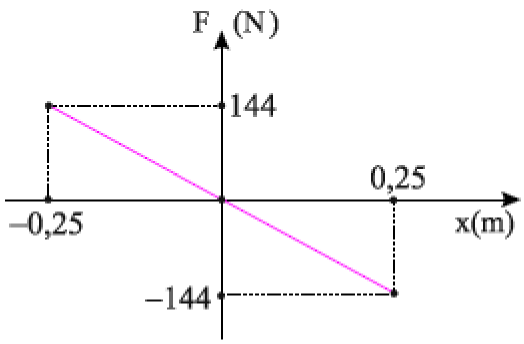
$$V_\kappa = \upsilon'_{max} = \omega' A' \Rightarrow A' = \frac{V_\kappa}{\omega'} = \frac{3m/s}{12rad/s} \Rightarrow \quad A' = \frac{1}{4}m = 0,25m$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) παίρνουμε:

$$x = 0,25 \cdot \eta\mu(12t) \quad (SI) \qquad (3)$$

γ) $F_{\varepsilon\pi\alpha\nu} = \Sigma F = -kx \Rightarrow F_{\varepsilon\pi\alpha\nu} = -576x \quad (SI) \quad \mu\varepsilon\ -0,25m \le x \le 0,25m$

Για $x = 0,25m$ προκύπτει $F = 144N$. Το ζητούμενο διάγραμμα φαίνεται στο σχήμα.



δ) $\frac{dK}{dt}=\frac{dW_{\Sigma F}}{dt}=\frac{\Sigma F\cdot\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow\frac{dK}{dt}=\Sigma F\cdot\upsilon\Rightarrow\frac{dK}{dt}=-kx\upsilon\ (4)$

Υπολογίζουμε τα x, υ τη χρονική στιγμή που ισχύει $U=\frac{K}{15}$ ή $K=15U$.

Από τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση παίρνουμε:

$$U+K=E\Rightarrow U+15U=E\Rightarrow U=\frac{1}{16}E\Rightarrow\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{16}\frac{1}{2}kA^2\Rightarrow x=\pm\frac{A}{4}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{16}m$$

Επειδή αναφερόμαστε σε στιγμή με θετική απομάκρυνση αποδεκτή τιμή είναι μόνο η $x=+\frac{1}{16}m$.

Η ταχύτητα βρίσκεται με εφαρμογή της διατήρησης της ενέργειας στην ταλάντωση.

$$U+K=E\Rightarrow\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon^2=\frac{1}{2}kA^2\Rightarrow\upsilon=\pm\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}(A^2-x^2)}\Rightarrow$$

$$\upsilon=\pm\sqrt{\frac{576N/m}{3kg+1kg}\cdot\left[(\frac{1}{4}m)^2-(\frac{1}{16}m)^2\right]}\Rightarrow\upsilon=\pm3\frac{\sqrt{15}}{4}\frac{m}{s}$$

Επειδή αναφερόμαστε σε χρονική στιγμή που το συσσωμάτωμα κινείται από θετική απομάκρυνση προς τη θέση ισορροπίας, αποδεκτή τιμή είναι η $\upsilon=-3\frac{\sqrt{15}}{4}\frac{m}{s}$.

Με αντικατάσταση στη σχέση (4) βρίσκουμε:

$$\frac{dK}{dt}=-576\frac{N}{m}\cdot\frac{1}{16}m\cdot(-3\frac{\sqrt{15}}{4}\frac{m}{s})\Rightarrow\frac{dK}{dt}=27\sqrt{15}\frac{J}{s}$$