

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

76

Γ' Γυμνασίου

10 -02-18

Όν/μο:.....

Ύλη : Αλγεβρικές παραστάσεις, Εξισώσεις
Γεωμετρία

Θέμα 1^ο :

- A.** Τι ονομάζουμε εξίσωση 2^{ου} βαθμού; (8 μον.)
- B.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Θαλή. (7 μον.)
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** Σωστό ή **(Λ)** Λάθος τις παρακάτω προτάσεις :
- i.** Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία τότε είναι ίσα. Σ Λ
 - ii.** Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων σχημάτων, ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους . Σ Λ
 - iii.** Κάθε εξίσωση δευτέρου βαθμού με $\Delta \geq 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση. Σ Λ
 - iv.** $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta$. Σ Λ
 - v.** Η εξίσωση $(2x - 3)^2 + x^2 + 6x = 5x^2 - 9x + 4$ είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού . Σ Λ
- (5x2=10 μον.)**

Θέμα 2^ο :

- A.** Έστω οι παραστάσεις: $A(x) = (x + 2)^3 - 3x(2x + 7) - 8$ και $B(x) = (2x - 3)^2 - 2(x - 2)(x - 3) + 2x - 15$
- i.** Να αποδείξετε ότι: $A(x) = x^3 - 9x$ και $B(x) = 2x^2 - 18$.
 - ii.** Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις $A(x)$ και $B(x)$.
 - iii.** Να λύσετε την εξίσωση: $A(x) = B(x)$. (3x4=12 μον.)
- B.i.** Να λύσετε την εξίσωση: $3x^2 - x - 2 = 0$. (8 μον.)
- ii.** Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο: $3x^2 - x - 2$. (5 μον.)

Θέμα 3^ο :

A. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $\frac{5x^2}{3y^3} \cdot \frac{6y}{10x}$

ii. $\frac{x^2 - 7x}{3x - 15} \cdot \frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 49}$

iii. $\frac{5x}{x-2} + \frac{10}{2-x}$

iv. $\frac{1}{2x+6} + \frac{x-1}{3x-x^2} - \frac{x}{x^2-9}$

(4x4=16 μον.)

B.i. Να αποδείξετε ότι: $\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{2}{x}\right)^2 = 8$. (5μον.)

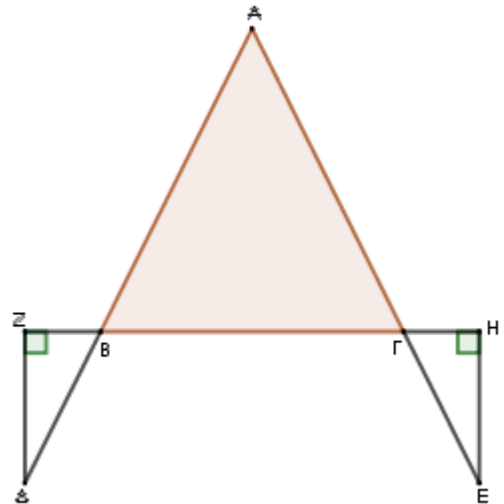
ii. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$A = \left(2020 + \frac{1}{1010}\right)^2 - \left(2020 - \frac{1}{1010}\right)^2$. (4μον.)

Θέμα 4^ο :

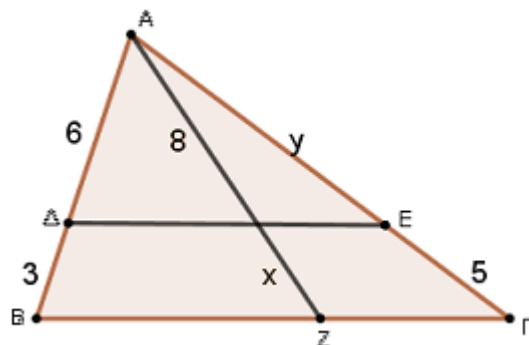
A. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το ισοσκελές τρίγωνο ABΓ. Επίσης, γνωρίζουμε ότι ΒΔ=ΓΕ, ΔΖ ⊥ ΒΓ και ΕΗ ⊥ ΒΓ.

- i. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΒΖ και ΓΕΗ.
- ii. Να δείξετε ότι ΒΖ=ΓΗ.
- iii. Να δείξετε ότι ΑΖ=ΑΗ.



(3x5=15 μον.)

B. Στο τρίγωνο ABΓ είναι ΔΕ//ΒΓ. Να υπολογίσετε το x και το y.



(10 μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(Ενδεικτικές)

Θέμα 1^ο :

A. Εξίσωση δευτέρου βαθμού ονομάζουμε κάθε ισότητα της μορφής
 $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$.

B. Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη. Δηλαδή:

$$\text{αν } \varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3 \text{ τότε } \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$$

Γ. i. Λ ii. Σ iii. Σ iv. Σ v. Λ

Θέμα 2^ο :

A. i. Είναι:

$$A(x) = (x + 2)^3 - 3x(2x + 7) - 8$$

$$A(x) = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 + 8 - 6x^2 - 21x - 8$$

$$A(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 6x^2 - 21x - 8$$

$$A(x) = x^3 - 9x$$

$$B(x) = (2x - 3)^2 - 2(x - 2)(x - 3) + 2x - 15$$

$$B(x) = 4x^2 - 12x + 9 - 2(x^2 - 3x - 2x + 6) + 2x - 15$$

$$B(x) = 4x^2 - 12x + 9 - 2x^2 + 6x + 4x - 12 + 2x - 15$$

$$B(x) = 2x^2 - 18$$

ii. $A(x) = x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x - 3)(x + 3)$

$$B(x) = 2x^2 - 18 = 2(x^2 - 9) = 2(x - 3)(x + 3)$$

iii. $A(x) = B(x) \Leftrightarrow x(x - 3)(x + 3) = 2(x - 3)(x + 3) \Leftrightarrow$

$$x(x - 3)(x + 3) - 2(x - 3)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 3)(x + 3)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

ή

$$x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$$

ή

$$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

B. i. Για την εξίσωση $3x^2 - x - 2 = 0$ έχουμε $\alpha=3$, $\beta=-1$ και $\gamma=-2$.

Τότε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 1 + 24 = 25 > 0$, άρα η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1 \pm 5}{6} = \begin{cases} x_1 = \frac{1+5}{6} = \frac{6}{6} = 1 \\ x_2 = \frac{1-5}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

ii. Το τριώνυμο $3x^2 - x - 2$ σύμφωνα με το i ερώτημα παραγοντοποιείται ως εξής:

$$3x^2 - x - 2 = 3(x-1)\left(x + \frac{2}{3}\right) = (x-1)(3x+2).$$

Θέμα 3^ο:

A. i. $\frac{5x^2}{3y^3} \cdot \frac{6y}{10x} = \frac{30x^2y}{30xy^3} = \frac{x}{y^2}$

ii. $\frac{x^2 - 7x}{3x - 15} \cdot \frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 49} = \frac{x(x-7)(x-5)^2}{3(x-5)(x-7)(x+7)} = \frac{x(x-5)}{3(x+7)}$

iii. $\frac{5x}{x-2} + \frac{10}{2-x} = \frac{5x}{x-2} - \frac{10}{x-2} = \frac{5x-10}{x-2} = \frac{5(x-2)}{x-2} = 5$

iv.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x+6} + \frac{x-1}{3x-x^2} - \frac{x}{x^2-9} &= \frac{1}{2(x+3)} + \frac{x-1}{x(3-x)} - \frac{x}{(x-3)(x+3)} = \\ &= \frac{1}{2(x+3)} - \frac{x-1}{x(x-3)} - \frac{x}{(x-3)(x+3)} \quad \text{E.K.Π.} = 2x(x-3)(x+3) \\ &= \frac{x(x-3) - 2(x-1)(x+3) - 2x^2}{2x(x-3)(x+3)} = \frac{x^2 - 3x - 2(x^2 + 3x - x - 3) - 2x^2}{2x(x-3)(x+3)} = \\ &= \frac{x^2 - 3x - 2x^2 - 6x + 2x + 6 - 2x^2}{2x(x-3)(x+3)} = \frac{x^2 - 3x - 2x^2 - 6x + 2x + 6 - 2x^2}{2x(x-3)(x+3)} = \\ &= \frac{-3x^2 - 7x + 6}{2x(x-3)(x+3)} = \frac{-3(x+3)(3x-2)}{2x(x-3)(x+3)} = \frac{-3(3x-2)}{2x(x-3)}. \end{aligned}$$

Όπου το τριώνυμο $-3x^2 - 7x + 6$ έχει $\Delta = 121 > 0$ και ρίζες $x = -3$ ή $x = \frac{2}{3}$ οπότε παραγοντοποιείται ως εξής:

$$-3x^2 - 7x + 6 = -3(x + 3)\left(x - \frac{2}{3}\right) = -(x + 3)(3x - 2).$$

B.i.

$$\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{2}{x}\right)^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{2}{x} + \left(\frac{2}{x}\right)^2 - x^2 + 2x \cdot \frac{2}{x} - \left(\frac{2}{x}\right)^2 =$$

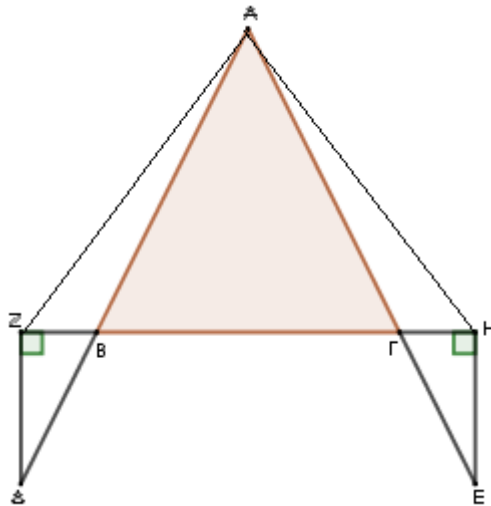
$$x^2 + 4 + \frac{4}{x^2} - x^2 + 4 - \frac{4}{x^2} = 8.$$

ii. Από το i ερώτημα για $x = 2020$ είναι:

$$\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{2}{x}\right)^2 = 8 \Rightarrow \left(2020 + \frac{2}{2020}\right)^2 - \left(2020 - \frac{2}{2020}\right)^2 = 8 \Rightarrow$$

$$\left(2020 + \frac{1}{1010}\right)^2 - \left(2020 - \frac{1}{1010}\right)^2 = 8 \Rightarrow A = 8.$$

Θέμα 4^ο:



A. i. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΔBZ και $\Delta ΓE$:

1. $B\Delta = \Gamma E$ (Y)

2. $\angle ZB\Delta = \angle H\Gamma E$ (ως κατακορυφήν των $\angle A\Gamma B = \angle B\Gamma A$)

Τα ορθογώνια τρίγωνα $ZB\Delta$ και $\Gamma H E$ είναι ίσα, εφόσον έχουν μία πλευρά κι μια οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία.

ii. Από την προηγούμενη σύγκριση προκύπτει ότι $BZ=ΓΗ$.

iii. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα AZB και $AΓΗ$:

1. $AB = AΓ$ (Υ)

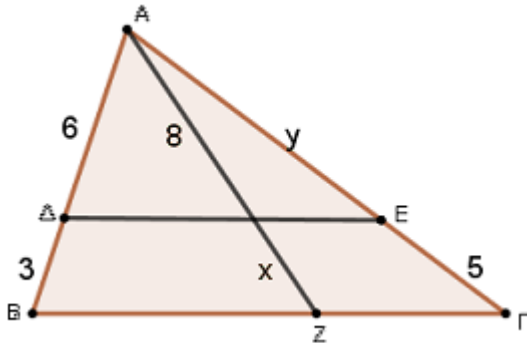
2. $ABZ = AΓΗ$ (ως παραπληρωματικές των $ABΓ = AΓB$)

3. $ZB = ΓΗ$ (ii)

} Π-Γ-Π
⇒

Τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε $AZ=AH$.

B.



Εφόσον $ΔΕ // ΒΓ$ από το Θεώρημα του Θαλή έχουμε:

$$\frac{AΔ}{BΔ} = \frac{AΗ}{AZ} \Leftrightarrow \frac{6}{3} = \frac{8}{x} \Leftrightarrow 6x = 24 \Leftrightarrow x = 4.$$

$$\frac{AΕ}{EΓ} = \frac{AΗ}{AZ} \Leftrightarrow \frac{y}{5} = \frac{8}{4} \Leftrightarrow 4y = 40 \Leftrightarrow y = 10.$$