# ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 75

**Ον/μο:………………..** **Α΄ Λυκείου**

**Ύλη: Το σύνολο R-Εξισώσεις-Ανισώσεις** **05-02-12**

## <u>Θέμα 1ο:</u>

**Α.** Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ **,** με $\alpha \neq 0$ και διακρίνουσα Δ

**α.1.** Πότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες ;

**2.** Πότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα ;

**3.** Πότε είναι αδύνατη;

**(Μον. 3)**

**β.** Αν $x_1$ και $x_2$ ρίζες της εξίσωσης , να αποδείξετε ότι

**1.** $x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ **2.** $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$ **(Μον.6)**

**Β.** Να συμπληρώσετε τις προτάσεις :

**1.** Αν θ>0 τότε :

- $|x| = \theta \Leftrightarrow$ ……. ….
- $|x| > \theta \Leftrightarrow$ …….

**2.** $|\alpha + \beta| \leq$ ……

**3.** Αν $\alpha \geq 0$ και $\sqrt[\nu]{\alpha} = x \Leftrightarrow \alpha =$ …..

**4.** $\sqrt{\alpha^2} =$ …..

**5.** $\alpha x = \beta$ και $\alpha \neq 0 \Leftrightarrow x =$ ….. **(Μον.5)**

**Γ.** Να ορίσετε ως (Σ) η (Λ) τις προτάσεις :

**1.** Αν $\alpha \cdot \beta < 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} < 0$ **Σ Λ**

**2.** Ισχύει : $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^3 < \beta^3$ **Σ Λ**

**3.** $\sqrt[\nu]{\alpha + \beta} = \sqrt[\nu]{\alpha} + \sqrt[\nu]{\beta}$ **Σ Λ**

**4.** Η εξίσωση $(\alpha - 1) \cdot x = \alpha(\alpha - 1)$ έχει μοναδική λύση x=α **Σ Λ**

**5.** Οι εξισώσεις $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 0$ και $x^2 - 3x + 2 = 0$ είναι ισοδύναμες **Σ Λ**

**(Μον.5)**

**Δ.** Να γράψετε ένα παράδειγμα ταυτότητας , εξίσωσης , ανισότητας, ανίσωσης. **(Μον.2)**

**Ε.** Να γράψετε ένα παράδειγμα εξίσωσης της μορφής αx=β που είναι αδύνατη και ένα που είναι ταυτότητα. **(Μον.2)**

**ΣΤ.** Τι συμπέρασμα βγάζετε από την πρόταση :

«η ανίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0$ ισχύει για κάθε $x\in R$ . **(Μον.2)**

## Θέμα 2ο:

**Α**. Να αποδείξετε ότι :

**1**. $\beta^2+1\geq 2\beta$ **2.** $2\alpha^2+2\alpha+1>0$ **(Μον.6)**

**Β.** Αν $\alpha^2+\beta^2+2=2(\beta-\alpha)$ **,** να βρείτε τους α , β **(Μον.4)**

**Γ.** Έστω $\alpha,\beta\in R$ με $|\alpha|\leq 2$ **,** $|\beta|\leq 3$

**1.** Να γράψετε την παράσταση $A=|\alpha+3|+|\beta-4|-7$ χωρίς απόλυτες τιμές **(Μον.5)**

**2.** Να αποδείξετε ότι $|3\alpha-2\beta|\leq 12$ **(Μον.5)**

**Δ.** Να βρεθεί η τιμή της παράστασης :

$$A=\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{3}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}-\frac{5}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$ **(Μον.5)**

## Θέμα 3ο:

**Α.** Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-2)\cdot x^2+2x-\lambda+4=0,\quad \lambda\in R$

**1.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πάντοτε ρίζες .

**2.** Να προσδιορίσετε την τιμή του λ , ώστε η εξίσωση να έχει μια διπλή ρίζα , την οποία και να βρείτε .

**3.** Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες .

**4.** Αν $x_1$ και $x_2$ είναι ρίζες της εξίσωσης και $x_1^2+x_2^2=10$,να βρείτε το λ.

**(Μον.4x5=20)**

**Β**. Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{2x^2-8x+8}{x^2-3x+2}-\frac{x+4}{x-2}=\frac{x-1}{x^2-2x+1}$ **(Μον.5)**

## Θέμα 4ο

**Α**. Να βρείτε για ποιες ακέραιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση

$K=\sqrt{5-|1-x|}+\sqrt{|x+2|-1}$ **(Μον.8)**

**Β.** Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=(\lambda+1)x^2+4x+\lambda-2$ **,** $\lambda\neq-1$

Να βρείτε το λ , ώστε το τριώνυμο :

**1.** να είναι πάντα θετικό

**2.** να έχει πραγματικές και άνισες ρίζες **(Μον.10)**

**Γ.** Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση

$h(x)=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{12-x-x^2}$ **(Μον.7)**



**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

## Θέμα 1$^{o}$:

**Α.** Θεωρία

**Β. 1.** • $|x| = \theta \Leftrightarrow \chi = \pm\theta$ • $|x| > \theta \Leftrightarrow x < -\theta$ ή $x > \theta$

**2.** $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

**3.** $\sqrt[\nu]{\alpha} = x \Leftrightarrow \alpha = x^{\nu}$

**4.** $\sqrt{a^2} = |a|$

**5.** $\alpha x = \beta$ και $\alpha \neq 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\beta}{\alpha}$

**Γ.** 1Σ, 2Σ, 3Λ, 4Λ, 5Λ

**Δ. Ταυτότητα**: $a^2 + \beta^2 = (a - \beta)(a + \beta)$

**Εξίσωση**: $2x + 3 = 7$

**Ανισότητα**: $a^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$

**Ανίσωση**: $4x \geq 8$

**Ε. Αδύνατη:** 0x=5 **Ταυτότητα:** 0x=0

**ΣΤ.** Αν $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$ για κάθε $x \in R$ τότε Δ<0 και α>0

## Θέμα 2$^{o}$:

**Α. 1.** $\beta^2 + 1 \geq 2\beta \Leftrightarrow \beta^2 - 2\beta + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\beta - 1)^2 \geq 0,$ που ισχύει.

**2.** $2a^2 + 2a + 1 > 0 \Leftrightarrow a^2 + (a^2 + 2a + 1) > 0 \Leftrightarrow a^2 + (a + 1)^2 > 0$
που ισχύει.

**Β.** Εχουμε: $\alpha^2+\beta^2+2=2(\alpha-\beta) \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+2-2\beta-2\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+1+1-2\beta-2\alpha=0$
$\Leftrightarrow (\alpha^2+2\alpha+1)+(\beta^2-2\beta+1)=0 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2+(\beta-1)^2=0 \Leftrightarrow$
$(\alpha+1)^2=0$ και $(\beta-1)^2=0 \Leftrightarrow$ <u>**α=-1 και β=1**</u>

**Γ. 1.** Εχουμε:
$|a| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq a \leq 2,$ άρα $1 \leq \alpha + 3 \leq 5$
$|\beta| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq \beta \leq 3,$ άρα $-7 \leq \beta - 4 \leq -1$

Ετσι: $A = |a + 3| + |\beta - 4| - 7 = (\alpha + 3) + (-\beta + 4) - 7 = \alpha - \beta$

**2.** Είναι:
$|3a - 2\beta| = |3\alpha + (-2\beta)| \leq |3\alpha| + |-2\beta| = 3|\alpha| + 2|\beta| \leq 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12$

$\delta\eta\lambda. |3\alpha - 2\beta| \leq 12.$

**Δ.**Είναι

$$A=\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{3}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}-\frac{5}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}-\frac{3(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}-\frac{5(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}=$$

$$=\frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2}-\frac{3(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}-\frac{5(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=$$

$$=\frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{1}-\frac{3(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{18-12}-\frac{5(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}{10}=$$

$$=2(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2}-\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}=\frac{4\sqrt{3}+4\sqrt{2}-3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}=0.$$

## **<u>Θέμα 3ο:</u>**

**Α. 1.** ●Αν λ=2 η εξίσωση γίνεται 2χ+2=0 άρα χ=-1

●**Αν** $\lambda\neq 2$ εξίσωση έχει

$$\Delta=2^2-4(\lambda-2)(-\lambda+4)=4+4\lambda^2-16\lambda-8\lambda+32=$$

$$4\lambda^2-24\lambda+36=4(\lambda^2-6\lambda+9)=4(\lambda-3)^2\geq 0.$$

Αρα έχει πάντοτε ρίζες.

**2**. Η εξίσωση έχει διπλή ρίζα όταν Δ=0 άρα όταν $4(\lambda-3)^2=0$ δηλ. **λ=3.**

Η διπλή ρίζα είναι η $x=-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{2}{2(3-2)}=$ **-1**

**3.** Ανισες είναι οι ρίζες όταν Δ>0 δηλ. όταν $\lambda\neq$ **3.**

**4.**Εχουμε ότι:

$$x_1^2+x_2^2=10 \text{ δηλ. } (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=10 \overset{Vieta}{\Leftrightarrow}$$

$$\left[-\frac{2}{2(\lambda-2)^2}\right]^2-2\frac{-\lambda+4}{\lambda-2}=10\Leftrightarrow\frac{1}{(\lambda-2)^2}+\frac{2\lambda-8}{\lambda-2}=10$$

$$\Leftrightarrow \lambda-2+(2\lambda-8)(\lambda-2)=(\lambda-2)^2\Leftrightarrow$$

$$\lambda-2+2\lambda^2-4\lambda-8\lambda+16=\lambda^2-4\lambda+4\Leftrightarrow\lambda^2-7\lambda+10=0\Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda=2 \text{ ή } \lambda=5}$$

**Β.** Η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{2(x^2-4x+4)}{(x-1)(x-2)}-\frac{x+4}{x-2}=\frac{x-1}{(x-1)^2}\overset{x\neq 1}{\underset{x\neq 2}{\Leftrightarrow}}\frac{2(x-2)^2}{(x-1)(x-2)}-\frac{x+4}{x-2}=\frac{x-1}{(x-1)^2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{2(x-2)}{x-1}-\frac{x+4}{x-2}=\frac{1}{x-1}\Leftrightarrow 2(x-2)^2-(x+4)(x-1)=x-2\Leftrightarrow$$

$$2x^2-8x+8-x^2+x-4x+4-x+2=0\Leftrightarrow x^2-12x+14=0.$$

Η εξίσωση έχει $\Delta=(-12)^2-4.1.14=144-56=88$ και επομένως ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{88}}{2}=\frac{12\pm 2\sqrt{22}}{2}=6\pm\sqrt{22}$$, δεκτές και οι δύο.

**<u>Θέμα 4ο:</u>**

**Α.** Πρέπει:

$5-|1-x|\geq 0$ **(1)** *και* $|x+2|\geq 0$ **(2)**

Από (1) είναι:

$|1-x|\leq 5\Leftrightarrow -5\leq 1-x\leq 5\Leftrightarrow -6\leq -x\leq 4\Leftrightarrow -4\leq x\leq 6$ (3)

Από (2) είναι:

$|x+2|\geq 1\Leftrightarrow x+2\leq -1$ ή $x+2\geq 1\Leftrightarrow x\leq -3$ ή $x\geq -1$ (4)

Απ΄ τη συναλήθευση των (3) και (4) έχουμε:

**$-4\leq x\leq -3$ ή $-1\leq x\leq 6$**

επειδή χ ακέραιος είναι: x= -4, -3, -1, 0, 1, 2, 3, 4,5,6.

**Β.** Το τριώνυμο έχει

$$\Delta=4^2-4(\lambda+1)(\lambda-2)=16-4\lambda^2+8\lambda-4\lambda+8=-4\lambda^2+4\lambda+24=$$

$$=-4(\lambda^2-\lambda-6)$$

**1.** Για να είναι το τριώνυμο **πάντα** θετικό πρέπει Δ<0 και α>0 δηλ.

$$\begin{cases}-4(\lambda^2-\lambda-6)<0\\ \lambda+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda^2-\lambda-6>0\\ \lambda>-1\end{cases}\overset{\text{ομόσ.}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\lambda<-2 \text{ ή } \lambda>3\\ \lambda>-1\end{cases}$$ άρα **λ>3.**

**2.** Θα έχει άνισες ρίζες όταν : Δ>0 δηλ.

$-4(\lambda^2-\lambda-6>0\Leftrightarrow \lambda^2-\lambda-6<0\overset{\text{ετερ}}{\Leftrightarrow}$ **$-2<\lambda<3$ και $\lambda\neq -1$**

**Γ.** Η παράσταση h ορίζεται όταν:

$$\begin{cases}x^2-4\geq 0\\ 12-x-x^2\geq 0\end{cases}\overset{\text{ομόσ}}{\underset{\text{ετερ}}{\Leftrightarrow}}\begin{cases}x\leq -2 \text{ ή } x\geq 2\\ -4\leq x\leq 3\end{cases}$$ άρα **$-4\leq x\leq -2$ ή $2\leq x\leq 3$**