ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **74**
Ον/μο:……………….. **Α΄ Λυκείου**
Ύλη: Πιθανότητες-Πράξεις-Διάταξη **6-11-11**

Θέμα 1^{ο}:

Α.1.Να δώσετε τον ορισμό του συνόλου.

(Μον. 3)

2.Γράψτε τα σύνολα των αριθμών που γνωρίζετε.

(Μον. 3)

3.Δίνονται τα σύνολα:

$\mathrm{A}=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\left(x^2-x\right)\cdot\left(x^2-1\right)=0\right\}$ και

$\mathrm{B}=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\left(x^2-x\right)\cdot\left(x^2-1\right)\neq 0\right\}$

Να βρείτε τα σύνολα:

α)Α **β)**Β **γ)**$\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ **δ)**$\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ **(Μον.8)**

Β.1.Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι:

$P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ **(Μον.6)**

2.Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις προτάσεις:

α)Αν το ενδεχόμενο Α δεν είναι αδύνατο, ούτε βέβαιο τότε $0<P(A)<1$ **Σ Λ**

β) $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\subseteq\mathrm{A}$ και $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\leq\mathrm{P}(\mathrm{A})$ **Σ Λ**

γ)Το σύνολο των ψηφίων του αριθμού $2^5\cdot5^7$ έχει τρία στοιχεία. **Σ Λ**

δ)Τα σύνολα

$\mathrm{A}=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\text{το κλάσμα } \mathrm{K}=\dfrac{x-1}{x^2-3x-4} \text{ δεν ορίζεται}\right\}$ και

$\mathrm{B}=\{-1,4\}$ είναι ίσα. **Σ Λ**

ε)Αν Α και Β ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τότε μπορεί να ισχύει η ισότητα

$\left(P(A)-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(P(B)-\dfrac{3}{4}\right)^2=0$ **Σ Λ**

(Μον. 5)

Θέμα 2^o:

Α. Από τους 60 μαθητές της Α΄ Λυκείου ενός σχολείου, 24 μαθητές συμμετέχουν στον διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 20 μαθητές συμμετέχουν στον διαγωνισμό της Ένωσης Ελλήνων Φυσικών και 12 μαθητές συμμετέχουν και στους δύο διαγωνισμούς. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Ποιά είναι η πιθανότητα ο μαθητής:

α) να συμμετέχει σ' έναν τουλάχιστον διαγωνισμό;

β) να συμμετέχει μόνο σ' έναν διαγωνισμό;

γ) να μη συμμετέχει σε κανέναν διαγωνισμό; **(Μον. 15)**

Β. Αν για τρείς πραγματικούς αριθμούς ισχύει α+β+γ=0 να αποδείξετε ότι $α^3+β^3+γ^3=3αβγ$.

(Μον. 6)

Γ. Εξετάστε αν: «για κάθε α>0 ισχύει $α^2>α$».

(Μον. 4)

Θέμα 3^o:

Α. Να αποδείξετε ότι:

α) ο αριθμός ν(ν+1) είναι άρτιος για κάθε $ν \in Z$.

β) αν ο α είναι περιττός, τότε ο $α^2$ έχει τη μορφή 8ν+1.

γ) αν οι α και β είναι περιττοί, να αποδείξετε ότι ο $α^2-β^2$ είναι πολλαπλάσιο του 8.

(Μον. 6)

Β. Δίνεται η παράσταση $K = \dfrac{x^2+x}{x^2-1} - \dfrac{x+2}{x^2+x-2}$.

α) Για ποιές τιμές του x ορίζεται η παράσταση;

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση Κ.

γ) Να βρείτε (αν ορίζεται) την τιμή της παράστασης Κ για

i) x=-2 και για **ii)** x=2011

(Μον. 9)

Γ. Αν α+β+γ=2 και $\dfrac{1}{α}+\dfrac{1}{β}+\dfrac{1}{γ}=0$ να αποδείξετε ότι $α^2+β^2+γ^2=4$.

(Μον. 6)

Δ. Να δείξετε ότι:

$$(α+β)^3-3(α+β)^2\cdot(α-β)+3(α+β)\cdot(α-β)^2-(α-β)^3=8β^3$$

(Μον. 4)

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Θέμα 4ο

Α.α)Αν α·β>0 να δείξετε ότι $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\geq 2$.

β)Αν α·β<0 να δείξετε ότι $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\leq -2$.

(Μον. 8)

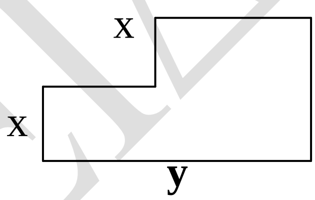
Β.Έστω α, β, γ θετικοί αριθμοί.

α)Να δείξετε ότι $\frac{\alpha}{1+\alpha+\beta}<\frac{\alpha}{1+\alpha}$.

β)Να δείξετε ότι $\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta}<\frac{\alpha}{1+\alpha}+\frac{\beta}{1+\beta}$.

(Μον. 8)

Γ.Αν 2<x<3 και 7<y<8
να εκτιμήσετε την περίμετρο
του σχήματος.



(Μον. 4)

Δ.Να δείξετε ότι ο αριθμός $A=5^1+5^2+5^3+5^4+....+5^{90}$ διαιρείται:

α)με τον 5.

(Μον. 2)

β)με τον 31.

(Μον. 3)

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

Θέμα 1^o:

Α.1. Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που προέρχεται από την εμπειρία μας ή τη διανόηση μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο.

2. Τα σύνολα των αριθμών είναι:

- Φυσικοί: $\mathbb{N}=\{0,1,2,3...\}$, $\mathbb{N}^*=\{1,2,3,...\}$.
- Ακέραιοι: $\mathbb{Z}=\{...-3,-2,-1,0,1,2,3...\}$, $\mathbb{Z}^*=\mathbb{Z}-\{0\}$.
- Ρητοί: $\mathbb{Q}=\left\{x \,\middle|\, x=\dfrac{\alpha}{\beta}, \alpha\in\mathbb{Z}, \beta\in\mathbb{Z}^*\right\}$.
- Άρρητοι: $\mathbb{Q}'$: Όλοι οι δεκαδικοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία που δεν είναι περιοδικά.
- Πραγματικοί: $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$.

3.α. Απ' την εξίσωση

$$\left(x^2-x\right)\left(x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow x(x-1)(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$x(x-1)^2(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-1.$$

Άρα Α={-1,0,1}

β. Απ' την σχέση

$$\left(x^2-x\right)\left(x^2-1\right)\neq 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2(x+1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0 \text{ και } x\neq 1 \text{ και } x\neq -1$$

Άρα Β=$\mathbb{R}-\{-1,0,1\}$

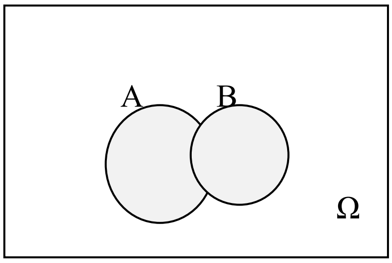
γ. Είναι $A\cup B=\mathbb{R}$

δ. Είναι $A\cap B=\varnothing$

Β.1. Έχουμε:

$$P(A\cup B)=\frac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}=\frac{N(A)+N(B)-N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}+\frac{N(B)}{N(\Omega)}-\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}$$

$$=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$



2. αΣ, βΣ, γΣ, δΣ, εΛ

Θέμα 2ο:

Α. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:
Μ: «ο μαθητής συμμετέχει στο διαγωνισμό της Ε.Μ.Ε.».
Φ: «ο μαθητής συμμετέχει στο διαγωνισμό της Ε.Ε.Φ.».

α) Το ενδεχόμενο ο μαθητής να συμμετέχει σε έναν τουλάχιστον διαγωνισμό είναι το Μ∪Φ. Άρα:

$$P(M\cup\Phi)=P(M)+P(\Phi)-P(M\cap\Phi)=\frac{24}{60}+\frac{20}{60}-\frac{12}{60}=\frac{32}{60}=\frac{8}{15}$$

β) Το ενδεχόμενο ο μαθητής να συμμετέχει σε έναν μόνο διαγωνισμό είναι το $(M-\Phi)\cup(\Phi-M)$. Άρα:

$$P\big((M-\Phi)\cup(\Phi-M)\big)=P(M-\Phi)+P(\Phi-M)=$$
$$P(M)-P(M\cap\Phi)+P(\Phi)-P(M\cap\Phi)=P(M)+P(\Phi)-2P(M\cap\Phi)=$$
$$\frac{24}{60}+\frac{20}{60}-2\cdot\frac{12}{60}=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$$

γ) Το ενδεχόμενο ο μαθητής να μη συμμετέχει σε κανέναν διαγωνισμό είναι το (Μ∪Φ)΄. Άρα $P(M\cup\Phi)'=1-P(M\cup\Phi)=1-\frac{8}{15}=\frac{7}{15}$.

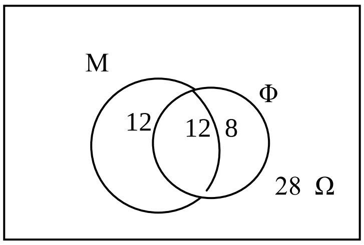
2ος τρόπος:

Σύμφωνα με το διάγραμμα του Venn έχουμε:

α) $P(M\cup\Phi)=\frac{12}{60}+\frac{12}{60}+\frac{8}{60}=\frac{32}{60}=\frac{4}{15}$

β) $P(M-\Phi)\cup(\Phi-M)=\frac{12}{60}+\frac{8}{60}=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$

γ) $P\big((M\cup\Phi)'\big)=\frac{28}{60}=\frac{7}{15}$



Β. Έχουμε: $\alpha+\beta+\gamma=0\Leftrightarrow\alpha+\beta=-\gamma\Leftrightarrow(\alpha+\beta)^3=(-\gamma)^3\Leftrightarrow$
$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=-\gamma^3\Leftrightarrow\alpha^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta^3=-\gamma^3\Leftrightarrow$
$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\Leftrightarrow\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-3\alpha\beta(-\gamma)\Leftrightarrow$
$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$

Γ. Αν $\alpha=\frac{1}{2}$,για παράδειγμα, τότε δεν ισχύει ότι: $\left(\frac{1}{2}\right)^2>\frac{1}{2}$. Επομένως η πρόταση: «για κάθε α>0 ισχύει $\alpha^2>\alpha$» δεν ισχύει γενικά.

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Θέμα 3ο:

Α.α)● Αν ν άρτιος δηλ. ν=2κ τότε

$$\nu(\nu+1)=2\kappa\cdot(2\kappa+1)=2\underbrace{\kappa(2\kappa+1)}_{\lambda}=2\lambda,\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma.$$

● Αν ν περιττός δηλ ν=2κ+1 τότε

$$\nu(\nu+1)=(2\kappa+1)(2\kappa+1+1)=(2\kappa+1)(2\kappa+2)=$$
$$2\cdot\underbrace{(2\kappa+1)(\kappa+1)}_{\lambda}=2\lambda,\acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma.$$

Άρα ο ν(ν+1) είναι άρτιος.

Σχόλιο: Οι αριθμοί ν και ν+1 είναι διαδοχικοί, ας κρατήσουμε λοιπόν ότι το ν(ν+1) είναι άρτιος.

β)Αφού α περιττός θα έχει τη μορφή α=2κ+1 τότε

$$\alpha^2=(2\kappa+1)^2=4\kappa^2+4\kappa+1=4\kappa(\kappa+1)+1\overset{(\alpha)}{=}4\cdot 2\nu+1=8\nu+1$$

γ)Αφού α και β περιττοί, οι α^2 και β^2,σύμφωνα με το (β), γράφονται

$\alpha^2=8\lambda+1,\ \beta^2=8\mu+1$. Τότε:

$$\alpha^2-\beta^2=(8\lambda+1)-(8\mu+1)=8\lambda+1-8\mu-1=8\lambda-8\mu=8\underbrace{(\lambda-\mu)}_{\rho}=8\rho$$

Δηλ. ο α^2-β^2 είναι πολλαπλάσιο του 8.

Β.α)Η παράσταση

$$\mathrm{K}=\frac{x^2+x}{x^2-1}-\frac{x+2}{x^2+x-2}\ \text{ορίζεται όταν}$$

$$x^2-1\neq 0 \text{ και } x^2+x-2\neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)\neq 0 \text{ και } (x-1)(x+2)\neq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1\neq 0 \text{ και } x+1\neq 0) \text{ και } (x-1\neq 0 \text{ και } x+2\neq 0)\Leftrightarrow$$
$$(x\neq 1 \text{ και } x\neq -1) \text{ και } (x\neq 1 \text{ και } x\neq -2) \text{ δηλ.}$$
$$x\neq -2 \text{ και } x\neq -1 \text{ και } x\neq 1$$

β)Έχουμε: $$\mathrm{K}=\frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{x+2}{(x-1)(x+2)}=\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x-1}=$$
$$=\frac{x-1}{x-1}=1 \text{ δηλ. } \mathrm{K}=1$$

Σχόλιο:Η παράσταση Κ είναι σταθερή ή αλλιώς λέμε ότι είναι ανεξάρτητη του x.

i)Για x=-2 η παράσταση Κ δεν ορίζεται.

ii)Για x=2011 είναι Κ=1.

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Γ. Αφού :

$\alpha+\beta+\gamma=2 \Leftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)^2=2^2$ δηλ. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\alpha\gamma=4$
δηλ. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)=4 \quad (1)$

Αφού:

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=0 \Leftrightarrow \beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta=0$ και η (1) γίνεται $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=4$

Δ. Είναι: $(\alpha+\beta)^3-3(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)+3(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2-(\alpha-\beta)^3=$
$=\left[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)\right]^3=(\alpha+\beta-\alpha+\beta)^3=(2\beta)^3=8\beta^3$

<u>Θέμα 4ο:</u>

Α. α)Έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\geq 2 \overset{(\alpha\beta>0)}{\Leftrightarrow} \alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2\geq 0$$

που ισχύει.

β)Έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\leq -2 \overset{(\alpha\beta<0)}{\Leftrightarrow} \alpha^2+\beta^2\geq -2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2\geq 0,$$

που ισχύει.

Β. **α)**Είναι $1+\alpha<1+\alpha+\beta \overset{:(\alpha)}{\Leftrightarrow} \frac{1+\alpha}{\alpha}<\frac{1+\alpha+\beta}{\alpha}$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{1+\alpha}>\frac{\alpha}{1+\alpha+\beta} \text{ ή } \frac{\alpha}{1+\alpha+\beta}<\frac{\alpha}{1+\alpha}$$

Αλλιώς: Τα κλάσματα έχουν ίδιο αριθμητή και ο παρονομαστής

1+α+β>1+α άρα $\frac{\alpha}{1+\alpha+\beta}<\frac{\alpha}{1+\alpha}$

β)Έχουμε: $\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta}=\frac{\alpha}{1+\alpha+\beta}+\frac{\beta}{1+\alpha+\beta}<\frac{\alpha}{1+\alpha}+\frac{\beta}{1+\beta}$

EYKΛΕΙΔΗΣ

Γ. Η περίμετρος είναι Π=4x+2y

$$\text{Έχουμε:}\ \begin{matrix} 2<x<3 \\ 7<y<8 \end{matrix}\Bigg| \underset{\cdot 2}{\overset{\cdot 4}{\Longrightarrow}} \begin{matrix} 8<4x<12 \\ 14<2y<16 \end{matrix}\Bigg| \overset{(+)}{\Rightarrow} 22<4x+2y<28 \text{ δηλ. } 22<\Pi<28$$

Δ.α) Έχουμε: $A=5^1+5^2+5^3+5^4+\ldots+5^{88}+5^{89}+5^{90}=$

$$=5\underbrace{\left(1+5+5^2 5^3+\ldots+5^{87}5^{88}5^{89}\right)}_{\lambda}=5\lambda \text{ δηλ. πολλαπλάσιο του 5.}$$

Β) Έχουμε: $A=\left(5^1+5^2+5^3\right)+\left(5^4+5^5+5^6\right)+\ldots+\left(5^{88}+5^{89}+5^{90}\right)=$

$$=5\left(1+5+5^2\right)+5^4\left(1+5+5^2\right)+\ldots+5^{88}\left(1+5+5^2\right)=$$

$$=5\cdot 31+5^4\cdot 31+\ldots+5^{88}\cdot 31=$$

$$=31\cdot\underbrace{\left(5+5^4+\ldots+5^{88}\right)}_{\mu}=31\mu \text{ δηλ. πολ/σιο του 31.}$$

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ