

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

71

Όν/μο:.....

Γ' Γυμνασίου

Ύλη : Εξισώσεις – Ανισώσεις, Γεωμετρία

29 -02-16

Θέμα 1^ο :

A. Τι ονομάζουμε κλασματική εξίσωση; (7 μον.)

B. Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων. (8 μον.)

Γ. Να χαρακτηρίσετε με (Σ) Σωστό ή (Λ) Λάθος τις παρακάτω προτάσεις :

i. Η εξίσωση $(x + 1)^2 - 2x^2 = 5x + 7 - x^2$ είναι δευτέρου βαθμού. Σ Λ

ii. Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων σχημάτων ισούται με το λόγο των περιμέτρων τους. Σ Λ

iii. Αν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$. Σ Λ

iv. Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες περιμέτρους, τότε είναι ίσα. Σ Λ

v. Η εξίσωση $\frac{x^2 + 1}{x - 1} - \frac{2x + 3}{x - 1} = \frac{-3}{x - 1}$ έχει λύση τον αριθμό 1. Σ Λ

(5x2=10 μον.)

Θέμα 2^ο :

A. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $x^2(x - 4) + 2x(x - 4) + (x - 4) = 0$.

ii. $2x^2 - 5x + 3 = 0$.

iii. $\frac{1}{x + 2} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x^2 + 2x}$. (3x6=18 μον.)

B. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 + 4x - 6$. (7 μον.)

Θέμα 3^ο :

A. Να βρείτε δύο διαδοχικούς άρτιους φυσικούς αριθμούς, αν είναι γνωστό ότι το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 100. (7 μον.)

B. i. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$2x + 5 < \frac{x}{2} + 2$ και $\frac{x - 1}{2} + 1 > x + \frac{1}{3}$ (10 μον.)

ii. Αν $-3 < x < 5$ και $1 < y < 2$, να αποδείξετε ότι: $-5 < x - y < 4$.

(7 μον.)

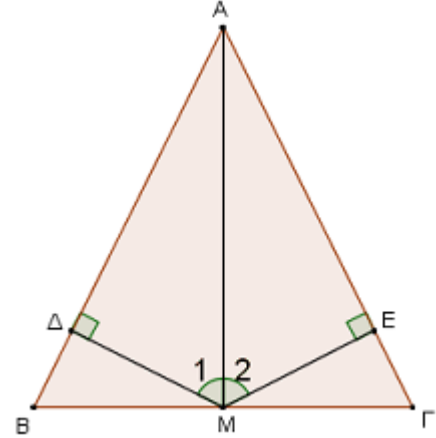
Θέμα 4^ο:

A. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB=AG).

Από το μέσο M της βάσης ΒΓ, φέρουμε
 $ΜΔ \perp AB$ και $ΜΕ \perp AG$.

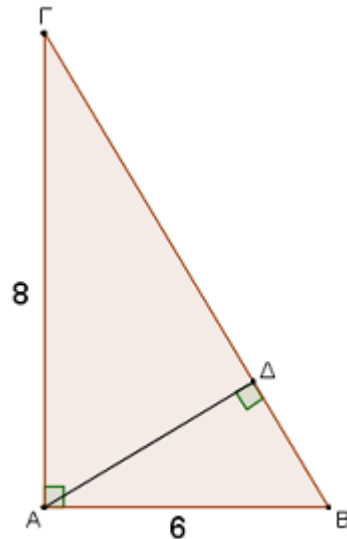
i. Να αποδείξετε ότι: $ΔΜ=ΜΕ$. (7 μον.)

ii. Να αποδείξετε ότι: $M_1 = M_2$. (5 μον.)



B. Να βρείτε το λόγο των εμβαδών
 των τριγώνων (ABΔ) και (ABΓ)
 του διπλανού σχήματος.

(13 μον.)



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(Ενδεικτικές)

Θέμα 1^ο :

- A.** Μία εξίσωση που περιέχει τουλάχιστον ένα κλάσμα με άγνωστο στον παρονομαστή, λέγεται κλασματική.
B. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν
 → Δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία ή
 → Μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.
Γ. i.Λ ii. Λ iii. Λ iv. Λ v. Λ

Θέμα 2^ο :

A. i. $x^2(x-4) + 2x(x-4) + (x-4) = 0 \Leftrightarrow$

$(x-4)(x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$x - 4 = 0 \Leftrightarrow$ ή $x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$x = 4$ ή $(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$x = -1$ διπλή λύση

ii. $2x^2 - 5x + 3 = 0$

Είναι $\alpha=2, \beta=-5$ και $\gamma=3$. Η διακρίνουσα είναι :

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1 > 0$. Άρα η εξίσωση έχει

2 άνισες λύσεις τις: $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{5-1}{4} = 1 \end{cases}$.

iii. $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x^2 + 2x} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x(x+2)}$ Ε.Κ.Π.=x(x+2)
Πρέπει $x \neq 0$ και $x \neq -2$ \Leftrightarrow

$x(x+2) \frac{1}{x+2} + x(x+2) \frac{1}{x} = x(x+2) \frac{2}{x(x+2)} \Leftrightarrow$

$x + x + 2 = 2 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ απόρ.

Β. Λύνουμε την αντίστοιχη εξίσωση $2x^2 + 4x - 6 = 0$.

Είναι $a=2$, $\beta=4$ και $\gamma=-6$. Η διακρίνουσα είναι :

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 16 + 48 = 64 > 0. \text{ Άρα η εξίσωση έχει}$$

$$2 \text{ άνισες λύσεις τις: } x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-4 \pm 8}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{-4+8}{4} = 1 \\ x_2 = \frac{-4-8}{4} = -3 \end{cases}.$$

Οπότε το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής :

$$2x^2 + 4x - 6 = 2(x-1)(x+3)$$

Θέμα 3^ο :

Α. Έστω $2k$ ο ένας άρτιος. Τότε ο άλλος θα είναι $2k+2$. Οπότε:

$$(2k)^2 + (2k+2)^2 = 100 \Leftrightarrow$$

$$4k^2 + 4k^2 + 8k + 4 - 100 = 0 \Leftrightarrow$$

$$8k^2 + 8k - 96 = 0 \Leftrightarrow$$

$$k^2 + k - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(k-3)(k+4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$k = 3 \text{ ή } k = -4 \text{ απόρ.}$$

Για $k=3$ οι ζητούμενοι άρτιοι είναι 6 και 8.

Β. $2x + 5 < \frac{x}{2} + 2 \Leftrightarrow$ και $\frac{x-1}{2} + 1 > x + \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$$4x + 10 < x + 4 \Leftrightarrow$$

$$4x - x < 4 - 10 \Leftrightarrow$$

$$3x < -6 \Leftrightarrow$$

$$x < -2$$

$$6 \frac{(x-1)}{2} + 6 > 6x + 6 \cdot \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$3(x-1) + 6 > 6x + 2 \Leftrightarrow$$

$$3x - 3 + 6 > 6x + 2 \Leftrightarrow$$

$$3x - 6x > 2 + 3 - 6 \Leftrightarrow$$

$$-3x > -1 \Leftrightarrow$$

$$x < \frac{1}{3}$$

Άρα οι κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι $x < -2$.

$$\text{ii. } \left. \begin{array}{l} -3 < x < 5 \\ 1 < y < 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Leftrightarrow \\ \cdot (-1) \end{array} \left. \begin{array}{l} -3 < x < 5 \\ -1 > -y > -2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} -3 < x < 5 \\ -2 < -y < -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Leftrightarrow \\ (+) \end{array} -5 < x - y < 4.$$

Θέμα 4^ο :

A.i. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ:

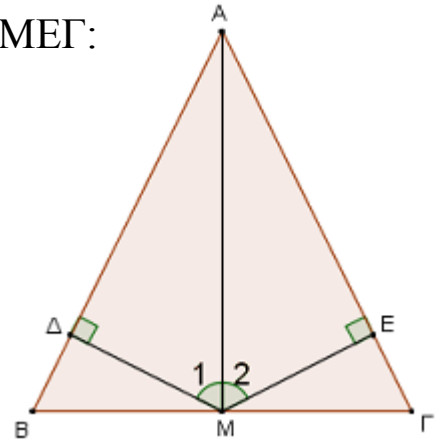
$$\left. \begin{array}{l} 1. B = \Gamma \text{ (ως προσκ. στη βάση ισοσκ.)} \\ 2. BM = MG \text{ (M : μέσο της } B\Gamma) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα.

Επομένως ΔΜ=ΜΕ.

ii. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΜ και ΑΕΜ:

$$\left. \begin{array}{l} 1. AM : \text{ κοινή} \\ 2. \Delta M = ME \text{ (i)} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, δηλαδή } M_1 = M_2.$$



B. Από Π.Θ. στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \Leftrightarrow B\Gamma^2 = 8^2 + 6^2 \Leftrightarrow$$

$$B\Gamma^2 = 64 + 36 \Leftrightarrow B\Gamma^2 = 100 \Leftrightarrow$$

$$B\Gamma = \sqrt{100} \Leftrightarrow B\Gamma = 10.$$

Τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΒΓ έχουν:

$$\left. \begin{array}{l} 1. A = \Delta = 90^\circ \\ 2. B : \text{ κοινή} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Τα τρίγωνα είναι όμοια,}$$

$$\text{με λόγο ομοιότητας } \lambda = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Τότε ο λόγος των εμβαδών τους είναι:

$$\frac{(AB\Delta)}{(AB\Gamma)} = \lambda^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}.$$

