

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

70

Όν/μο:.....

Γ' Γυμνασίου

Ύλη : Αλγεβρικές παραστάσεις

19 -01-16

Θέμα 1^ο :

A. Τι ονομάζουμε (Ε.Κ.Π.) Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων; (8 μον.)

B. Να αποδείξετε ότι: $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$. (7 μον.)

Γ. Ποια είναι η διαφορά της εξίσωσης από την ταυτότητα; Να δώσετε ένα παράδειγμα για την κάθε περίπτωση. (10 μον.)

Δ. Να χαρακτηρίσετε με (Σ) Σωστό ή (Λ) Λάθος τις παρακάτω προτάσεις :

i. $\frac{2^5 \cdot 2^6}{2^4} = 2^{5+6-4} = 2^7$. Σ Λ

ii. $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$. Σ Λ

iii. $\frac{5x}{2x-3} = \frac{5}{2-3} = -5$. Σ Λ

iv. Ο βαθμός του αθροίσματος δύο πολυωνύμων 3^{ου} βαθμού είναι ίσος με 3. Σ Λ

v. $\frac{5}{x-2} + \frac{5}{x} = \frac{5+5}{x-2+x} = \frac{10}{2x-2}$. Σ Λ

(5x1=5 μον.)

Θέμα 2^ο :

A. Να γράψετε την παράσταση $A = \sqrt{8} + \sqrt{16} - \sqrt{200} + \sqrt{50}$ στη μορφή $\alpha + \beta\sqrt{2}$, όπου α, β ακέραιοι. (8 μον.)

B. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $(4 + 3\sqrt{2})^2$. (5 μον.)

ii. $(4 - 3\sqrt{2})(4 + 3\sqrt{2})$. (5 μον.)

Γ. Να μετατρέψετε την παράσταση $\frac{4 + 3\sqrt{2}}{A}$ σε ένα κλάσμα με παρονομαστή ρητό αριθμό. (7 μον.)

Θέμα 3^ο : Έστω οι παραστάσεις:

$$A(x) = (x + 2)^3 - 3x(2x + 7) - 8$$

$$B(x) = (2x - 3)^2 - 2(x - 2)(x - 3) + 2x - 15$$

A. Να αποδείξετε ότι: $A(x) = x^3 - 9x$ και $B(x) = 2x^2 - 18$.

(2x5=10 μον.)

B. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις $A(x)$ και $B(x)$.

(2x5=10 μον.)

Γ. Να λύσετε την εξίσωση: $A(x) - B(x) = 0$.

(5 μον.)

Θέμα 4^ο : Δίνεται η παράσταση: $E(x) = \left(\frac{2x^2}{x^3 - x^2 + x - 1} - \frac{x - x^2}{x^2 + 1} \right) : \frac{x^2}{x^2 - 1}$.

A. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $x^3 - x^2 + x - 1$.

(6 μον.)

B. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση $E(x)$.

(4 μον.)

Γ. Να αποδείξετε ότι: $E(x) = \frac{x + 1}{x}$.

(10 μον.)

Δ. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\frac{2 \cdot 5^2}{125 - 5^2 + 4} - \frac{5 - 25}{25 + 1} : \frac{5^2}{24}$$

(5 μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(Ενδεικτικές)

Θέμα 1^ο :

A. Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται , το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του .

B. $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta - \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$.

Γ. Ταυτότητα είναι μία ισότητα που επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών της . π.χ. $0x = 0$ ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}$.

Εξίσωση είναι μία ισότητα που επαληθεύεται για συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών της π.χ. $2x=6$ ισχύει για $x=3$.

Δ. i. Σ ii. Σ iii. Λ iv. Λ v. Λ

Θέμα 2^ο :

A. $A = \sqrt{8} + \sqrt{16} - \sqrt{200} + \sqrt{50}$

$$A = \sqrt{4 \cdot 2} + 4 - \sqrt{100 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2}$$

$$A = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} + 4 - \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{25} \cdot \sqrt{2}$$

$$A = 2\sqrt{2} + 4 - 10\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$$

$$A = 4 - 3\sqrt{2}$$

B. i. $(4 + 3\sqrt{2})^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3\sqrt{2} + (3\sqrt{2})^2 = 16 + 24\sqrt{2} + 18 = 34 + 24\sqrt{2}$.

ii. $(4 - 3\sqrt{2})(4 + 3\sqrt{2}) = 4^2 - (3\sqrt{2})^2 = 16 - 18 = -2$.

Γ. $\frac{4 + 3\sqrt{2}}{A} = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{4 - 3\sqrt{2}} = \frac{(4 + 3\sqrt{2})(4 + 3\sqrt{2})}{(4 - 3\sqrt{2})(4 + 3\sqrt{2})} \stackrel{i}{=} \frac{34 + 24\sqrt{2}}{-2} = -17 - 12\sqrt{2}$.

Θέμα 3^ο :

Α. Έχουμε: $A(x) = (x + 2)^3 - 3x(2x + 7) - 8$

$$A(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 6x^2 - 21x - 8$$

$$A(x) = x^3 - 9x$$

$$B(x) = (2x - 3)^2 - 2(x - 2)(x - 3) + 2x - 15$$

$$B(x) = 4x^2 - 12x + 9 - 2(x^2 - 3x - 2x + 6) + 2x - 15$$

$$B(x) = 4x^2 - 12x + 9 - 2(x^2 - 5x + 6) + 2x - 15$$

$$B(x) = 4x^2 - 12x + 9 - 2x^2 + 10x - 12 + 2x - 15$$

$$B(x) = 2x^2 - 18$$

Β. $A(x) = x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x - 3)(x + 3)$

$$B(x) = 2x^2 - 18 = 2(x^2 - 9) = 2(x - 3)(x + 3)$$

Γ. $A(x) - B(x) = 0 \Leftrightarrow x(x - 3)(x + 3) - 2(x - 3)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow$

$$(x - 3)(x + 3)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

ή

$$x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$$

ή

$$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Θέμα 4^ο :

A. $x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x - 1) + (x - 1) = (x - 1)(x^2 + 1)$

B. Η παράσταση $E(x)$ γίνεται: $E(x) = \left(\frac{2x^2}{(x - 1)(x^2 + 1)} - \frac{x - x^2}{x^2 + 1} \right) : \frac{x^2}{x^2 - 1}$.

Για να ορίζεται πρέπει: $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και

$$x^2 + 1 \neq 0 \text{ που ισχύει και}$$

$$x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1 \text{ και}$$

$$x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

Γ. Είναι: $E(x) = \left(\frac{2x^2}{(x - 1)(x^2 + 1)} - \frac{x - x^2}{x^2 + 1} \right) : \frac{x^2}{x^2 - 1} \xrightarrow{\text{Ε.Κ.Π.}=(x-1)(x^2+1)} \Rightarrow$

$$E(x) = \left(\frac{2x^2}{(x - 1)(x^2 + 1)} - \frac{(x - x^2)(x - 1)}{(x - 1)(x^2 + 1)} \right) : \frac{x^2}{x^2 - 1} \Rightarrow$$

$$E(x) = \left(\frac{2x^2 - (x^2 - x - x^3 + x^2)}{(x - 1)(x^2 + 1)} \right) : \frac{x^2}{x^2 - 1} \Rightarrow$$

$$E(x) = \left(\frac{2x^2 - x^2 + x + x^3 - x^2}{(x - 1)(x^2 + 1)} \right) : \frac{x^2}{x^2 - 1} \Rightarrow$$

$$E(x) = \left(\frac{x^3 + x}{(x - 1)(x^2 + 1)} \right) : \frac{x^2}{x^2 - 1} \Rightarrow$$

$$E(x) = \left(\frac{x(x^2 + 1)}{(x - 1)(x^2 + 1)} \right) : \frac{x^2}{(x - 1)(x + 1)} \Rightarrow$$

$$E(x) = \frac{x}{x - 1} \cdot \frac{(x - 1)(x + 1)}{x^2} \Rightarrow$$

$$E(x) = \frac{x + 1}{x}$$

Δ. Από το Γ ερώτημα αντικαθιστώντας στην παράσταση $E(x)$ όπου x το 5 έχουμε:

$$\frac{2 \cdot 5^2}{125 - 5^2 + 4} - \frac{5 - 25}{25 + 1} : \frac{5^2}{24} = \frac{5 + 1}{5} = \frac{6}{5}.$$

ΕΥΚΚΛΕΙΔΗΣ