ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

68

Ον/μο:...................... **Γ' Γυμνασίου**

Ύλη : Αλγεβρικές παραστάσεις (∫ 1.1-1.5) **01 -11-15**
Ισότητα τριγώνων

Θέμα 1ο :

Α. Τι ονομάζουμε ταυτότητα; **(5 μον.)**

Β. Να αποδείξετε ότι: $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$. **(5 μον.)**

Γ. Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων. **(5 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Η διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου είναι ύψος και διχοτόμος του. **Σ Λ**

ii. $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha+\beta}$ με $\alpha\geq 0$ και $\beta\geq 0$. **Σ Λ**

iii. $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$. **Σ Λ**

iv. Τα τρίγωνα ανάλογα με το είδος των γωνιών τους, χωρίζονται σε ισόπλευρα, ισοσκελή και σκαληνά. **Σ Λ**

v. Ο βαθμός του πολυωνύμου: $(3x+4)^2-9x^2+12x-2$ ως προς x είναι 1. **Σ Λ**

(5x2=10 μον.)

Θέμα 2ο :

Α.i. Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{18}-\sqrt{8}\cdot\sqrt{48}+3\cdot\sqrt{54}-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{30}=-6\sqrt{6}\ .$$ **(4 μον.)**

ii. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\sqrt{8+7\sqrt{1+5\sqrt{3+3\sqrt{4}}}}\ .$$ **(4 μον.)**

iii. Να μετατρέψετε το κλάσμα $\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$, που έχει άρρητο παρονομαστή, σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή. **(4 μον.)**

Β.i. Να βρείτε τους αριθμούς α, β, γ ώστε τα μονώνυμα:
$5x^4y^3$, $\alpha x^\beta y^\gamma$ να είναι αντίθετα. **(3 μον.)**

ii. Αν $P(x)=\left(6x^2-5x+7\right)-\left(x+1\right)^2+\left(3x^2-4\right)$ και $Q\left(x\right)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, να βρείτε τις τιμές των α, β, γ ώστε τα δύο αυτά πολυώνυμα να είναι ίσα. **(5 μον.)**

iii. Αν $P\left(x\right)=4x^3-2x^2+7x-3$ και $Q\left(x\right)=5x^2+2x-1$, να βρείτε το πολυώνυμο $P\left(x\right)\cdot Q\left(x\right)$ και να το γράψετε κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x. **(5 μον.)**

<u>Θέμα 3ο</u> :

Α. Να αποδείξετε ότι: $\left(x+y\right)^2=\left(-x-y\right)^2$. **(5 μον.)**

Β. Να αποδείξετε ότι:

i. $2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\alpha\gamma=\left(\alpha-\beta\right)^2+\left(\beta-\gamma\right)^2+\left(\gamma-\alpha\right)^2$.

ii. $\left(3\alpha^2+2\beta\right)^2-\left(3\alpha^2-2\beta\right)^2+3\alpha\left(\beta-1\right)+3\alpha=24\alpha^2\beta+3\alpha\beta$.

(2x5=10 μον.)

Γ. i. Να αποδείξετε ότι: $3\left(\alpha-\beta\right)\left(\alpha+\beta\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right)=3\alpha^4-3\beta^4$.

ii. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$3\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(2+\frac{1}{2}\right)\left(2^2+\frac{1}{2^2}\right).$$

(2x5=10 μον.)

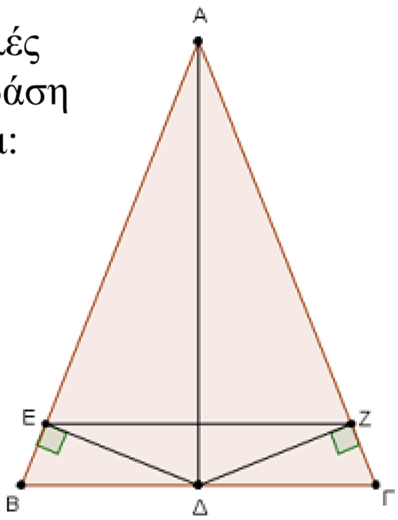
<u>Θέμα 4ο</u> :

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ και ΑΔ είναι η διάμεσός του προς τη βάση ΒΓ. Αν $\Delta E\perp AB$ και $\Delta Z\perp A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

Α. Τα τρίγωνα ΒΕΔ και ΔΖΓ είναι ίσα. **(9 μον.)**

Β. Τα τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές. **(7 μον.)**

Γ. Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ είναι ίσα. **(9 μον.)**



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(Ενδεικτικές)

Θέμα 1ο :

Α. Ταυτότητα ονομάζουμε μία ισότητα, που περιέχει μεταβλητές, και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

Β. $(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$.

Γ. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν:

- Δύο πλευρές ίσες μία προς μία.
- Μία οξεία γωνία και μία πλευρά ίσες μία προς μία.

Γ. i. Λ **ii.** Λ **iii.** Σ **iv.** Λ **v.** Σ

Θέμα 2ο :

Α.i.
$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{18}-\sqrt{8}\cdot\sqrt{48}+3\cdot\sqrt{54}-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{30}=$$
$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{3\cdot 6}-\sqrt{8}\cdot\sqrt{8\cdot 6}+3\cdot\sqrt{9\cdot 6}-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5\cdot 6}=$$
$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}-\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{6}+3\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{6}-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}=$$
$$\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot\sqrt{6}-\left(\sqrt{8}\right)^2\cdot\sqrt{6}+3\cdot 3\cdot\sqrt{6}-2\left(\sqrt{5}\right)^2\cdot\sqrt{6}=$$
$$3\sqrt{6}-8\sqrt{6}+9\sqrt{6}-10\sqrt{6}=-6\sqrt{6}.$$

ii.
$$\sqrt{8+7\sqrt{1+5\sqrt{3+3\sqrt{4}}}}=\sqrt{8+7\sqrt{1+5\sqrt{3+3\cdot 2}}}=\sqrt{8+7\sqrt{1+5\sqrt{3+6}}}=$$
$$\sqrt{8+7\sqrt{1+5\sqrt{9}}}=\sqrt{8+7\sqrt{1+5\cdot 3}}=\sqrt{8+7\sqrt{1+15}}=\sqrt{8+7\sqrt{16}}=$$
$$\sqrt{8+7\cdot 4}=\sqrt{8+28}=\sqrt{36}=6.$$

iii.
$$\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}=\frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{7-5}=$$
$$\frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{2}=\sqrt{7}+\sqrt{5}.$$

Β. i. Για να είναι αντίθετα τα μονώνυμα $5x^4y^3$, $\alpha x^\beta y^\gamma$ πρέπει:
α=-5, **β=4** και **γ=3**.

ii. Έχουμε: $P(x)=\left(6x^2-5x+7\right)-\left(x+1\right)^2+\left(3x^2-4\right)=$

$6x^2-5x+7-\left(x^2+2x+1\right)+3x^2-4=$

$6x^2-5x+7-x^2-2x-1+3x^2-4=8x^2-7x+2$

Τότε: $P\left(x\right)=Q\left(x\right)\Leftrightarrow 8x^2-7x+2=\alpha x^2+\beta x+\gamma \Leftrightarrow$

α=8, **β=-7** και **γ=2**.

iii. Είναι: $P\left(x\right)\cdot Q\left(x\right)=\left(4x^3-2x^2+7x-3\right)\left(5x^2+2x-1\right)=$

$20x^5+8x^4-4x^3-10x^4-4x^3+2x^2+35x^3+14x^2-7x-15x^2-6x+3=$

$20x^5-2x^4+27x^3+x^2-13x+3.$

<u>Θέμα 3</u> :

Α. Είναι: $\left(x+y\right)^2=\left(-x-y\right)^2\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2=\left(-x\right)^2-2\left(-x\right)y+y^2\Leftrightarrow$

$x^2+2xy+y^2=x^2+2xy+y^2$ που ισχύει.

Β.i. $\left(\alpha-\beta\right)^2+\left(\beta-\gamma\right)^2+\left(\gamma-\alpha\right)^2=$

$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2+\gamma^2-2\alpha\gamma+\alpha^2=$

$2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\alpha\gamma.$

ii. $\left(3\alpha^2+2\beta\right)^2-\left(3\alpha^2-2\beta\right)^2+3\alpha\left(\beta-1\right)+3\alpha=$

$9\alpha^4+12\alpha^2\beta+4\beta^2-\left(9\alpha^4-12\alpha^2\beta+4\beta^2\right)+3\alpha\beta-3\alpha+3\alpha=$

$9\alpha^4+12\alpha^2\beta+4\beta^2-9\alpha^4+12\alpha^2\beta-4\beta^2+3\alpha\beta-3\alpha+3\alpha=$

$24\alpha^2\beta+3\alpha\beta.$

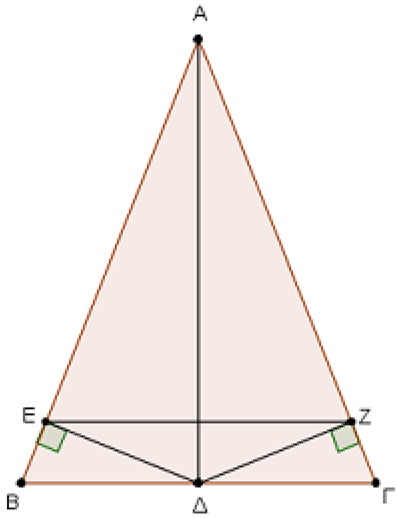
Γ.i. Είναι: $3\left(\alpha-\beta\right)\left(\alpha+\beta\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right)=3\left(\alpha^2-\beta^2\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right)=$

$3\left(\alpha^4-\beta^4\right)=3\alpha^4-3\beta^4.$

ii. Από τι (i) ερώτημα για α=2 και $\beta=\dfrac{1}{2}$ έχουμε:

$$3\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(2+\frac{1}{2}\right)\left(2^2+\frac{1}{2^2}\right)=3\left(2^4-\left(\frac{1}{2}\right)^4\right)=3\left(16-\frac{1}{16}\right)=3\cdot\frac{255}{16}=\frac{765}{16}.$$

<u>Θέμα 4^{o}</u> :



Α. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΔ και ΖΔΓ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\mathrm{B\Delta} = \Delta\Gamma(\mathrm{A\Delta}:\text{διάμεσος}) \\ 2.\mathrm{B} = \Gamma(\text{ως προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς}) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα.

Β. Εφόσον το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές θα είναι ΑΒ=ΑΓ(1).
Επίσης από την προηγούμενη σύγκριση έχουμε ότι ΕΒ=ΖΓ(2).
Αφαιρώντας κατά μέλη τις (1), (2) προκύπτει ότι ΑΕ=ΑΖ.
Οπότε το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.

Γ. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\mathrm{AE} = \mathrm{AZ}(\text{Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές}) \\ 2.\mathrm{A\Delta}:\text{κοινή} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα.