

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

63

Ον/μο:.....

Γ' Γυμνασίου

Ύλη : Αλγεβρικές παραστάσεις-Γεωμετρία

30 -11-14

Θέμα 1^ο :

- A. Τι ονομάζουμε παραγοντοποίηση ; (6 μον.)
- B. Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας τριγώνων. (7 μον.)
- Γ. Να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$. (7 μον.)
- Δ. Να χαρακτηρίσετε με (Σ) Σωστό ή (Λ) Λάθος τις παρακάτω προτάσεις :
- i. $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$. Σ Λ
- ii. Η παράσταση $\frac{3}{4}x^2y^2 + 2$ είναι μονώνυμο. Σ Λ
- iii. Ο βαθμός του πολυωνύμου $(x + 2)^2 - x^2$ είναι 2. Σ Λ
- iv. $(2x + 3)^2 = 2x^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2x \cdot 3^2 + 27$. Σ Λ
- v. Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, είναι ίσα. Σ Λ
(5x1=5 μον.)

Θέμα 2^ο :

- A. i. Να αποδείξετε ότι: $(x + 3)^2 - (3 - x)^2 - 11x = x$. (8 μον.)
- ii. Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:
 $A = 2017^2 - 2011^2 - 22.154$ (4 μον.)
- B. Έστω τα πολυώνυμα $A(x) = (x + 2)^3 - 3x(2x + 7) - 8$ και $B(x) = (2x - 3)^2 - 2(x - 2)(x - 3) + 2x - 15$.
- i. Να αποδείξετε ότι: $A(x) = x^3 - 9x$ και $B(x) = 2x^2 - 18$. (5 μον.)
- ii. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις A(x) και B(x). (5 μον.)
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $A(x)=B(x)$. (3 μον.)

Θέμα 3^ο :

A. Να βρείτε το Ε.Κ.Π και το Μ.Κ.Δ των παραστάσεων:

i. $6x^2y^3\omega, \quad 8x^4y\omega^2, \quad 4x^6y^7$ (7 μον.)

ii. $3\alpha^3 - 3\alpha, \quad 2\alpha^2 - 4\alpha + 2, \quad \alpha^2 - 3\alpha + 2$ (5 μον.)

B. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις :

i. $\frac{2x - 4}{x^2 - 2x}$ (3 μον.)

ii. $\frac{2x + 3xy + 6y + 4}{3xy + 3y + 2x + 2}$ (5 μον.)

iii. $\frac{(\alpha - \beta)^2}{(\alpha^2 - \beta^2)} \cdot \frac{(\alpha + \beta)}{(\alpha - \beta)}$ (5 μον.)

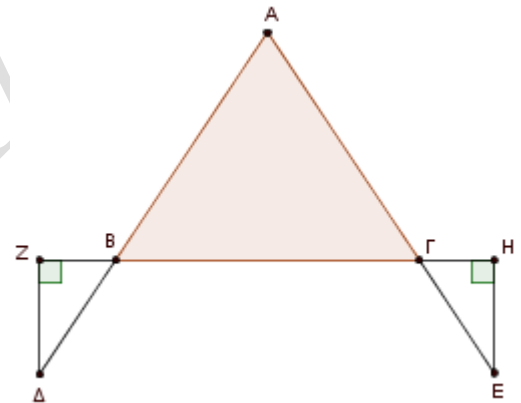
Θέμα 4^ο :

A. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με κορυφή το σημείο Α. Επίσης, ΒΔ=ΓΕ και ΔΖ ⊥ ΒΓ, ΕΗ ⊥ ΒΓ.

i. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΒΖ και ΓΕΗ. (5 μον.)

ii. Να αποδείξετε ότι ΒΖ=ΓΗ. (4 μον.)

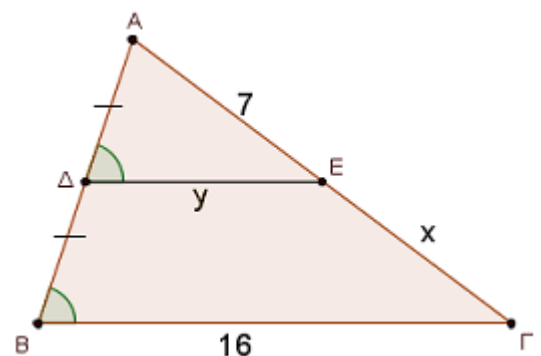
iii. Να αποδείξετε ότι ΑΖ=ΑΗ. (4 μον.)



B. Στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{B} = \hat{A\Delta E}$.

Να υπολογίσετε το x και το y.

(12 μον.)



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(Ενδεικτικές)

Θέμα 1^ο :

A. Παραγοντοποίηση ονομάζουμε τη διαδικασία με την οποία μια παράσταση , που είναι άθροισμα , μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων .

B. Τα κριτήρια ισότητας τριγώνων είναι:

1^ο κριτήριο ισότητας(Π-Γ-Π)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση , τότε είναι ίσα.

2^ο κριτήριο ισότητας(Γ-Π-Γ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

3^ο κριτήριο ισότητας(Π-Π-Π)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Γ. Είναι : $(\alpha + \beta)^3 = (\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta) = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)(\alpha + \beta) =$

$$\alpha^3 + \alpha^2\beta + 2\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + \beta^2\alpha + \beta^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

Δ. i. Σ ii. Λ iii. Λ iv. Λ v. Σ

Θέμα 2^ο :

A.i. Είναι: $(x + 3)^2 - (3 - x)^2 - 11x = x^2 + 6x + 9 - (9 - 6x + x^2) - 11x =$
 $x^2 + 6x + 9 - 9 + 6x - x^2 - 11x = 12x - 11x = x.$

ii. Από το (i) ερώτημα για $x=2014$ έχουμε:

$$(2014 + 3)^2 - (3 - 2014)^2 - 11 \cdot 2014 = 2014 \Leftrightarrow$$

$$2017^2 - (-2011)^2 - 22.154 = 2014 \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{2017^2 - 2011^2 - 22.154}_A = 2014 \Leftrightarrow A = 2014$$

B. i. $A(x) = (x + 2)^3 - 3x(2x + 7) - 8 =$

$$x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 - 6x^2 - 21x - 8 =$$

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 6x^2 - 21x - 8 = x^3 - 9x$$

$$B(x) = (2x - 3)^2 - 2(x - 2)(x - 3) + 2x - 15 =$$

$$(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 - 2(x^2 - 3x - 2x + 6) + 2x - 15 =$$

$$4x^2 - 12x + 9 - 2x^2 + 6x + 4x - 12 + 2x - 15 = 2x^2 - 18$$

ii. $A(x) = x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x-3)(x+3)$
 $B(x) = 2x^2 - 18 = 2(x^2 - 9) = 2(x-3)(x+3)$

iii. $A(x) = B(x) \Leftrightarrow A(x) - B(x) = 0 \Leftrightarrow$
 $x(x-3)(x+3) - 2(x-3)(x+3) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3)(x-2) = 0 \Leftrightarrow$
 $x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$
ή
 $x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$
ή
 $x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Θέμα 3^ο :

A. i. $6x^2y^3\omega, \quad 8x^4y\omega^2, \quad 4x^6y^7$
Ε.Κ.Π. = $24x^6y^7\omega^2$
Μ.Κ.Δ. = $2x^2y$

ii. $3\alpha^3 - 3\alpha, \quad 2\alpha^2 - 4\alpha + 2, \quad \alpha^2 - 3\alpha + 2$

Θα παραγοντοποιήσουμε πρώτα τις παραστάσεις:

- $3\alpha^3 - 3\alpha = 3\alpha(\alpha^2 - 1) = 3\alpha(\alpha - 1)(\alpha + 1)$
- $2\alpha^2 - 4\alpha + 2 = 2(\alpha^2 - 2\alpha + 1) = 2(\alpha - 1)^2$
- $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = \alpha^2 - 2\alpha - \alpha + 2 = \alpha(\alpha - 2) - (\alpha - 2) = (\alpha - 2)(\alpha - 1)$

Τότε έχουμε: Ε.Κ.Π. = $6\alpha(\alpha - 1)^2(\alpha + 1)(\alpha - 2)$

Μ.Κ.Δ. = $\alpha - 1$

B. i. $\frac{2x-4}{x^2-2x} = \frac{2(x-2)}{x(x-2)} = \frac{2}{x}$

ii. $\frac{2x+3xy+6y+4}{3xy+3y+2x+2} = \frac{x(2+3y)+2(3y+2)}{x(3y+2)+(3y+2)} = \frac{(3y+2)(x+2)}{(3y+2)(x+1)} = \frac{x+2}{x+1}$

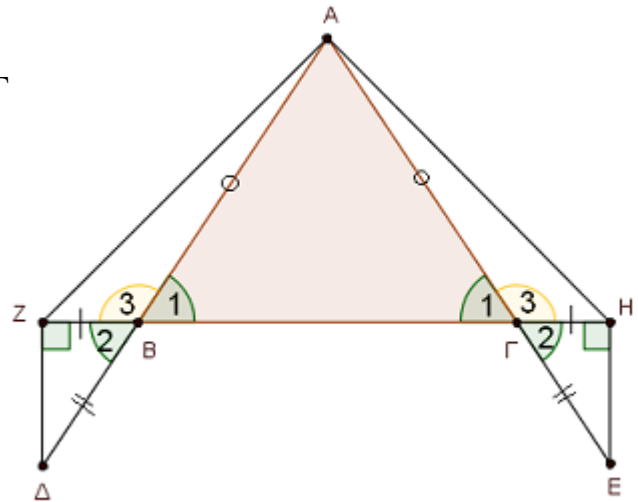
iii. $\frac{(\alpha-\beta)^2}{(\alpha^2-\beta^2)} \cdot \frac{(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)} = \frac{(\alpha-\beta)^2 \cdot (\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)} = 1$

Θέμα 4^ο :

A.

Υ $\triangle AB\Gamma$: ισοσκελές, $EH \perp B\Gamma$
 $\Delta Z \perp B\Gamma$, $B\Delta = \Gamma E$

Σ **i.** $\triangle ABZ, \triangle A\Gamma H$
ii. $BZ = \Gamma H$
iii. $AZ = AH$



i. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΔZB και ΓHE :

1. $B\Delta = \Gamma E$ (Υ)

2. $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2$ (ως κατακορυφήν των $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$)

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες, άρα είναι ίσα.

ii. Από την προηγούμενη σύγκριση εφόσον τα τρίγωνα ΔZB και ΓHE είναι ίσα, όλα τους τα στοιχεία θα είναι αντίστοιχα ίσα, οπότε $BZ = \Gamma H$.

iii. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ABZ και $A\Gamma H$:

1. $AB = A\Gamma$ (Υ)

2. $\hat{B}_3 = \hat{\Gamma}_3$ (ως παραπληρώματα των $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$)

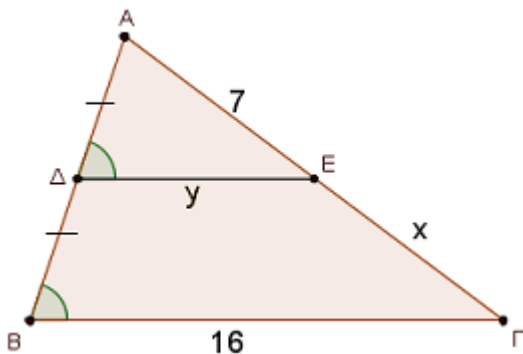
3. $BZ = \Gamma H$ (ii)

Π-Γ-Π

\Rightarrow

Τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα όλα τους τα στοιχεία ίσα, οπότε $AZ = AH$.

B.



Εφόσον $\hat{B} = \hat{A}\Delta E$ και έχουν θέση εντός, εκτός κι επί τα αυτά μέρη γωνιών, μεταξύ των ευθειών $\Delta E, B\Gamma$ που τέμνονται από την AB θα είναι $\Delta E \parallel B\Gamma$. Τότε, στο $AB\Gamma$ το Δ είναι μέσο της AB και $\Delta E \parallel B\Gamma$ άρα το E θα είναι μέσο της $A\Gamma$, δηλαδή

$AE = E\Gamma \Leftrightarrow x = 7$. Τότε $B\Gamma = 2\Delta E \Leftrightarrow y = 16 : 2 \Leftrightarrow y = 8$.

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ