

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

57

Ον/μο:.....

Γ' Γυμνασίου

Ύλη : Αλγεβρικές παραστάσεις-Γεωμετρία

13 -01-14

Θέμα 1^ο :

- A. Τι ονομάζουμε παραγοντοποίηση ; (7 μον.)
 - B. Πότε δύο πολύγωνα είναι όμοια; (6 μον.)
 - Γ. Να αποδείξετε ότι $\alpha - \beta \cdot (\alpha + \beta) = \alpha^2 - \beta^2$. (7 μον.)
 - Δ. Να χαρακτηρίσετε με (Σ) Σωστό ή (Λ) Λάθος τις παρακάτω προτάσεις :
 - i. Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων σχημάτων ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους . Σ Λ
 - ii. Η παράσταση $3x^2y^{\frac{1}{3}}$ είναι μονώνυμο. Σ Λ
 - iii. Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες περιμέτρους , τότε είναι ίσα . Σ Λ
 - iv. $x^2 + 1 - 1 - x^2 = 1 - x^4$. Σ Λ
 - v. Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι πάντοτε όμοια . Σ Λ
- (5x1=5 μον.)

Θέμα 2^ο :

- A. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \sqrt{3} + \sqrt{2}^2$ και $B = \sqrt{3} - \sqrt{2}^2$.
 - i. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων A , B. (6 μον.)
 - ii. Να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης $\Gamma = A \cdot B$ είναι ίση με 1 . (7 μον.)
- B. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις :
 - i. $4x^3 - 4x^2$
 - ii. $x^3(x + 1) - x(x + 1)$
 - iii. $\alpha^2\beta^2 - 4$
 - iv. $\alpha(x - y) + x^2 - y^2$
 - v. $5x^4 - 100x^2 + 500$
 - vi. $(x - 1)(x - 2) - (1 - x)(2x + 1)$ (6x2=12 μον.)

Θέμα 3^ο :

A. Να βρείτε το Ε.Κ.Π και το Μ.Κ.Δ των παραστάσεων:

$x^2 - 4x + 4$, $x^2 - 4$, $x - 2 (x + 3)$ **(5 μον.)**

B. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις :

i. $\frac{2x + 3xy + 6y + 4}{3xy + 3y + 2x + 2}$

ii. $\frac{\alpha - \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} \cdot \frac{\alpha + \beta}{(\alpha - \beta)}$ **(2x5=10μον.)**

Γ. Να κάνετε τις πράξεις :

i. $\frac{1}{x^2 + xy} + \frac{1}{xy + y^2} - \frac{1}{xy}$

ii. $\frac{\alpha + \beta}{\alpha^2 - \alpha\beta} - \frac{2\beta}{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2} + \frac{2\beta^2}{\alpha(\alpha - \beta)^2}$ **(2x5=10μον.)**

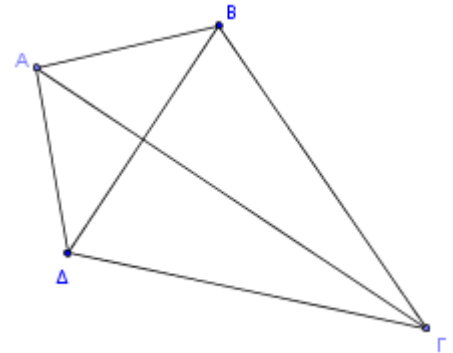
Θέμα 4^ο :

A. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΒ=ΑΔ και την ΑΓ διχοτόμο της

γωνίας $\hat{\Delta}AB$.Να αποδείξετε ότι :

i. Το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές . **(8 μον.)**

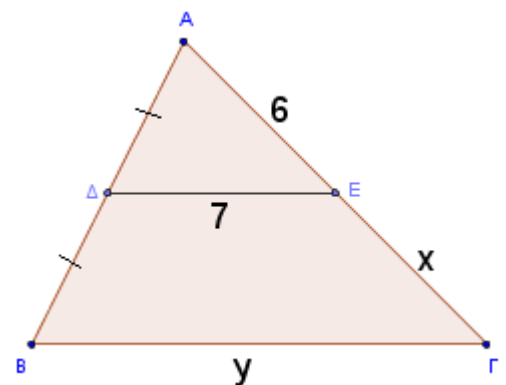
ii. Η ΑΓ είναι μεσοκάθετος της διαγωνίου ΒΔ. **(5 μον.)**



B. Στο διπλανό σχήμα είναι ΔΕ//ΒΓ και Δ μέσο της πλευράς ΑΒ .

i. Να υπολογίσετε το x και το y. **(6 μον.)**

ii. Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι 5 τ.μ , να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΔΕΓΒ. **(6 μον.)**



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(Ενδεικτικές)

Θέμα 1^ο :

- A.** Παραγοντοποίηση ονομάζουμε τη διαδικασία με την οποία μια παράσταση , που είναι άθροισμα , μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων .
- B.** Δύο πολύγωνα είναι όμοια όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες .
- Γ.** Είναι : $\alpha - \beta \cdot \alpha + \beta = \alpha^2 + \alpha\beta - \alpha\beta - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2$
- Δ.** **i.** Λ **ii.** Λ **iii.** Λ **iv.** Σ **v.** Σ

Θέμα 2^ο :

A.i. $A = \sqrt{3} + \sqrt{2} \quad ^2 = \sqrt{3} \quad ^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \quad ^2 = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}$

B. $\sqrt{3} - \sqrt{2} \quad ^2 = \sqrt{3} \quad ^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \quad ^2 = 3 - 2\sqrt{6} + 2 = 5 - 2\sqrt{6}$

ii. $\Gamma = A \cdot B = (5 + 2\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6}) = 5^2 - (2\sqrt{6})^2 =$
 $= 25 - 2^2 \sqrt{6} \quad ^2 = 25 - 4 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$

B. i. $4x^3 - 4x^2 = 4x^2(x - 1)$

ii. $x^3(x + 1) - x(x + 1) = (x + 1)(x^3 - x) = x(x + 1)(x^2 - 1) =$
 $= x(x + 1)(x + 1)(x - 1) = x(x + 1)^2(x - 1)$

iii. $\alpha^2\beta^2 - 4 = (\alpha\beta)^2 - 2^2 = (\alpha\beta - 2)(\alpha\beta + 2)$

iv. $\alpha(x - y) + x^2 - y^2 = \alpha(x - y) + (x - y)(x + y) = (x - y)(\alpha + x + y)$

v. $5x^4 - 100x^2 + 500 = 5(x^4 - 20x^2 + 100) = 5(x^2 - 10)^2$

vi. $x - 1(x - 2) - (1 - x)(2x + 1) = (x - 1)(x - 2) + (x - 1)(2x + 1) =$
 $= (x - 1)(x - 2 + 2x + 1) = (x - 1)(3x - 1)$

Θέμα 3^ο :

A. Θα παραγοντοποιήσουμε τις παραστάσεις :

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

Τότε ψάχνουμε το Ε.Κ.Π και το Μ.Κ.Δ των παραστάσεων :

$$(x - 2)^2, \quad x - 2(x + 2) \text{ και } (x - 2)(x + 3)$$

οπότε έχουμε : Ε.Κ.Π= $x - 2^2 (x + 2)(x + 3)$

Μ.Κ.Δ=(x-2)

Β. i. $\frac{2x + 3xy + 6y + 4}{3xy + 3y + 2x + 2} = \frac{x(2 + 3y) + 2(3y + 2)}{x(3y + 2) + (3y + 2)} = \frac{(3y + 2)(x + 2)}{(3y + 2)(x + 1)} = \frac{x + 2}{x + 1}$

ii. $\frac{\alpha - \beta^2}{(\alpha^2 - \beta^2)} \cdot \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha - \beta^2 \cdot (\alpha + \beta)}{\alpha - \beta (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)} = 1$

Γ. i. $\frac{1}{x^2 + xy} + \frac{1}{xy + y^2} - \frac{1}{xy} =$

$\frac{1}{x(x + y)} + \frac{1}{y(x + y)} - \frac{1}{xy} \stackrel{\text{Ε.Κ.Π}=xy(x+y)}{=} =$

$\frac{y}{xy(x + y)} + \frac{x}{xy(x + y)} - \frac{x + y}{xy(x + y)} = \frac{y + x - x - y}{xy(x + y)} = 0$

ii. $\frac{\alpha + \beta}{\alpha^2 - \alpha\beta} - \frac{2\beta}{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2} + \frac{2\beta^2}{\alpha(\alpha - \beta)^2} =$

$\frac{\alpha + \beta}{\alpha(\alpha - \beta)} - \frac{2\beta}{(\alpha - \beta)^2} + \frac{2\beta^2}{\alpha(\alpha - \beta)^2} \stackrel{\text{Ε.Κ.Π}=\alpha(\alpha-\beta)^2}{=} =$

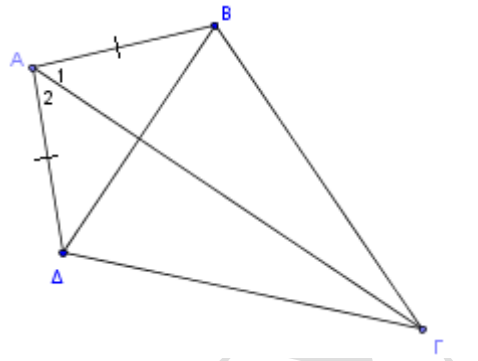
$\frac{\alpha - \beta (\alpha + \beta)}{\alpha^2(\alpha - \beta)^2} - \frac{2\alpha\beta}{\alpha(\alpha - \beta)^2} + \frac{2\beta^2}{\alpha(\alpha - \beta)^2} =$

$\frac{\alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2}{\alpha(\alpha - \beta)^2} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}{\alpha(\alpha - \beta)^2} = \frac{\alpha - \beta^2}{\alpha(\alpha - \beta)^2} = \frac{1}{\alpha}$

Θέμα 4^ο :

A

y	$AB=AD$ $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$
Σ	i. $\triangle B\Gamma\Delta$: ισοσκελές ii. $A\Gamma$ μέσο $\perp B\Delta$



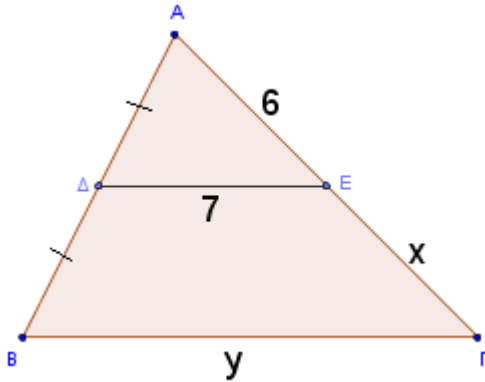
i. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Gamma\Delta$:

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $AB = AD$ (Y)
2. $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (AΓ : διχοτόμος $\triangle AB\Delta$)
3. AΓ: κοινή | } | \Rightarrow Από Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα |
|---|---|--|

Οπότε $GB = GD$ άρα $\triangle B\Gamma\Delta$ ισοσκελές .

ii. Το A ισαπέχει από τα B , Δ ($AB=AD$) .Ομοίως το Γ ισαπέχει από τα B , Δ ($GB=GD$) .Άρα τα A και Γ ανήκουν στη μεσοκάθετο της διαγωνίου BΔ .Εφόσον κάθε ευθεία ορίζεται μονοσήμαντα από δύο σημεία , έπεται ότι η AΓ είναι μεσοκάθετος της BΔ .

B.



i. Στο $\triangle AB\Gamma$ είναι Δ μέσο της AB και $\Delta E // B\Gamma$ άρα θα είναι E μέσο της $A\Gamma$ δηλαδή $AE = EG \Leftrightarrow$

Επίσης $B\Gamma = 2\Delta E \Leftrightarrow y = 2 \cdot 7 \Leftrightarrow$

ii. Τα τρίγωνα $A\Delta E$, $AB\Gamma$ έχουν :

1. \hat{A} : κοινή

2. $\hat{A\Delta E} = \hat{A B\Gamma}$ (ως εντός κι επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΔE , $B\Gamma$ που τέμνονται από την AB)

Οπότε τα τρίγωνα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας

$$\lambda = \frac{B\Gamma}{\Delta E} = \frac{14}{7} = 2$$

Άρα ο λόγος των εμβαδών τους θα είναι $\lambda^2 = 2^2 = 4$

$$\text{Οπότε } \frac{A B\Gamma}{A \Delta E} = 4 \Leftrightarrow \frac{A B\Gamma}{5} = 4 \Leftrightarrow (A B\Gamma) = 20 \tau. \mu$$

Το ζητούμενο εμβαδό είναι :

$$\Delta E \Gamma B = (A B\Gamma) - (A \Delta E) = 20 - 5 = 15 \tau. \mu$$