Κεφάλαιο 2ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ 2ο ΜΕΡΟΣ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

1. * Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, $\alpha, \beta \in R$, $\alpha < \beta$, τότε ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. **Σ Λ**

2. * Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και $x_0 \in R$, τότε για κάθε $x \in R$ υπάρχει $\xi \in R$ ώστε $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$. **Σ Λ**

3. * Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β), τότε υπάρχει ένα μόνο $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\alpha) - f(\beta) = f'(\xi)(\alpha - \beta)$. **Σ Λ**

4. * Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x_0 εσωτερικό του διαστήματος [α, β], στο οποίο η εφαπτομένη του διαγράμματος της f είναι παράλληλη στον άξονα x΄x. **Σ Λ**

5. * Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β), τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη προς την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$. **Σ Λ**

6. * Αν f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση, τότε μεταξύ δύο ριζών της f, υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της f΄. **Σ Λ**

7. ** Αν f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση, τότε μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f΄, υπάρχει το πολύ μια ρίζα της f. **Σ Λ**

8. * Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β], τότε υπάρχει εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$, με $x_0 \in (\alpha, \beta)$, με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$. **Σ Λ**

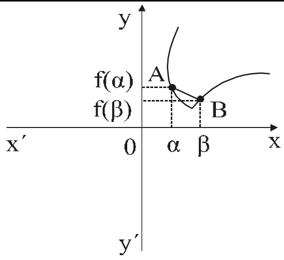
9. * Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β], τότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f. **Σ Λ**

10. * Υπάρχουν συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle, χωρίς να ισχύουν (όλες) οι υποθέσεις του θεωρήματος. **Σ Λ**

11. * Αν για μια συνάρτηση ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Fermat, τότε υπάρχει x_0 ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $(x_0, f(x_0))$ να είναι παράλληλη με τον άξονα x΄x. **Σ Λ**

12. * Αν για μια συνάρτηση f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο [α, β], τότε εφαρμόζεται και το θεώρημα της μέσης τιμής, στο ίδιο διάστημα. **Σ Λ**

13. ***** Για τη συνάρτηση του σχήματος, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Μ (ξ, f (ξ)) της C_f με ξ ∈ (α, β), όπου η εφαπτομένη της f, να είναι παράλληλη με την ΑΒ.



Σ **Λ**

14. ***** Αν f ´ (x) = (x + 3) x^2, τότε το x_0 = - 3 είναι θέση τοπικού ελάχιστου. **Σ** **Λ**

15. ***** Για τη συνάρτηση f (x) = $3x^2$, x ∈ [- 3, 2], υπάρχει μόνο ένα τοπικό ακρότατο. **Σ** **Λ**

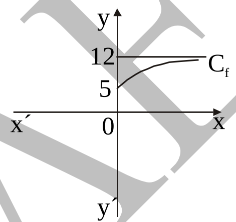
16. ***** Για τη συνάρτηση f (x) = ημx, x ∈ R, υπάρχει τουλάχιστον ένα τοπικό ελάχιστο μεγαλύτερο από κάποιο τοπικό μέγιστο. **Σ** **Λ**

17. ***** Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση f, με f ´ (x) > 0 για 2 < x < 7. Αν f (3) = 5, τότε μπορεί να ισχύει f (5) = 4. **Σ** **Λ**

18. ***** Η συνάρτηση f (x) = ημx + $2e^x$, 0 < x < $\frac{\pi}{2}$, παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0 = $\frac{\pi}{3}$. **Σ** **Λ**

19. ***** Αν f ´ (x) = e^{-x^2+16}, τότε η f δεν μπορεί να έχει τοπικά ακρότατα. **Σ** **Λ**

20. ***** Η συνάρτηση του σχήματος έχει θετική παράγωγο για κάθε x ∈ (0, + ∞).

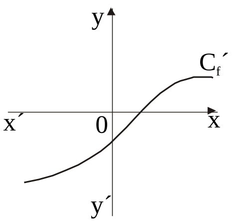


Σ **Λ**

21. ***** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g που είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους. Αν σ' ένα σημείο x_0 παρουσιάζουν και οι δυο τοπικό μέγιστο, τότε και η συνάρτηση f + g, εφόσον ορίζεται, θα παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0. **Σ** **Λ**

22. ***** Αν μια άρτια συνάρτηση έχει στο x_0 τοπικό ελάχιστο, τότε στο - x_0 θα έχει τοπικό μέγιστο. **Σ** **Λ**

23. ***** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, και η γραφική παράσταση της f ´ είναι αυτή του σχήματος, τότε η f δεν είναι γνησίως μονότονη.



Σ **Λ**

24. ***** Αν για τη συνάρτηση f ισχύει f ´ (x) < 0, x ∈ R, τότε f (x) < 0, x ∈ R. **Σ** **Λ**

25. ***** Αν για τη συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο R, ισχύει f ΄ (5) = 0, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 = 5. **Σ** **Λ**

26. ***** Μια περιοδική συνάρτηση f μπορεί να έχει ένα μόνο τοπικό ακρότατο. **Σ** **Λ**

27. * Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, ισχύει $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ για κάθε $x \neq 0$. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R^*. **Σ** **Λ**

28. * Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο R, τότε θα ισχύει $f'(x) \leq 0$. **Σ** **Λ**

29. * Αν για μια παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f, ισχύει $f'(x) = e^x ημ4$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. **Σ** **Λ**

30. * Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f, μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f. **Σ** **Λ**

31. * Μια συνάρτηση f μπορεί να έχει τοπικό ακρότατο και σε σημείο x_0, στο οποίο δεν είναι συνεχής. **Σ** **Λ**

32. * Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0, τότε ισχύει $f'(x_0) = 0$. **Σ** **Λ**

33. * Αν η παράγωγος μιας συνάρτησης είναι μηδέν σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση είναι σταθερή στο Δ. **Σ** **Λ**

34. * Αν στο εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της f ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$, τότε το x_0 είναι τοπικό ακρότατο της f. **Σ** **Λ**

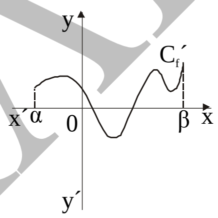
35. * Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], τότε πιθανά ακρότατα της f είναι **Σ** **Λ**

α) τα σημεία του διαστήματος (α, β) στα οποία η f ΄ μηδενίζεται **Σ** **Λ**

β) τα σημεία του διαστήματος (α, β) στα οποία η f δεν παραγωγίζεται **Σ** **Λ**

γ) τα άκρα του [α, β].

36. * Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f ΄ μιας συνάρτησης f. Τότε η f έχει δύο τουλάχιστον θέσεις τοπικών ακροτάτων. **Σ** **Λ**



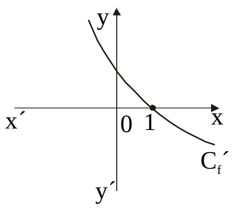
37. * Αν $f'(x) = (x - 1)^2$, τότε το σημείο $x_0 = 1$ είναι θέση τοπικού ακροτάτου της f. **Σ** **Λ**

38. * Αν $f'(x) = |x - 1|$, τότε το σημείο $x_0 = 1$ είναι τοπικό ακρότατο της f. **Σ** **Λ**

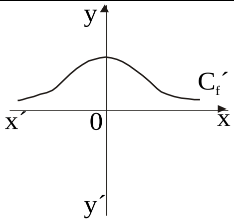
39. * Αν $f'(x) = x^2 + 1$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα. **Σ** **Λ**

40. * Αν $f'(x) = x^2 - 5x + 6$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [2, 3]. **Σ** **Λ**

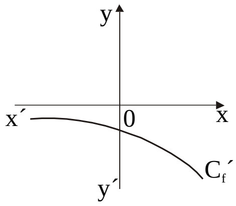
41. * Αν το διάγραμμα C_f' της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε η f έχει ακρότατο στο $x_0 = 1$. **Σ** **Λ**



42. ***** Αν το διάγραμμα $C_f{}'$ της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R. **Σ** **Λ**

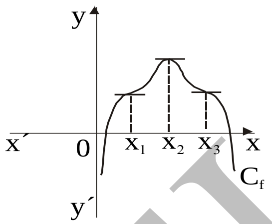


43. ***** Αν το διάγραμμα $C_f{}'$ της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R. **Σ** **Λ**



44. ***** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) με f (α) = f (β) και f ΄΄ (x) > 0, για κάθε x ∈ [α, β], τότε η εξίσωση f ΄ (x) = 0 έχει μια μόνο ρίζα στο (α, β). **Σ** **Λ**

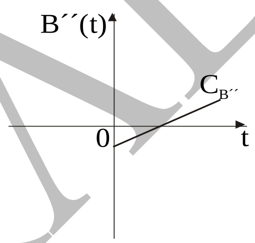
45. ***** Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε:



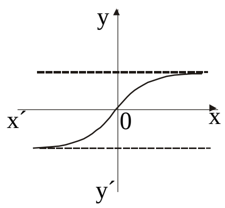
α) το x_1 είναι σημείο καμπής **Σ** **Λ**
β) το x_2 είναι σημείο καμπής **Σ** **Λ**
γ) το x_3 είναι σημείο καμπής **Σ** **Λ**

46. ***** Αν f ΄΄ (x) = $(x - 2)^2$, τότε η f έχει σημείο καμπής στο $x_0 = 2$. **Σ** **Λ**

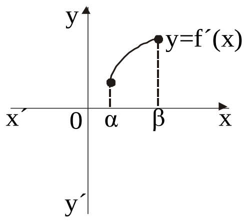
47. ***** Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της B ΄΄ (t), όπου B (t) είναι η συνάρτηση του βάρους κάποιου ανθρώπου που βρίσκεται σε δίαιτα, μετά από χρόνο t. Τότε ο ρυθμός μείωσης του βάρους, στην αρχή μειώνεται και μετά αυξάνει. **Σ** **Λ**



48. ***** Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε ισχύει f ΄΄ (x) < 0 για κάθε x ∈ (0, + ∞). **Σ** **Λ**



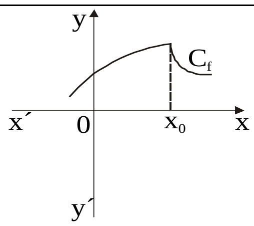
49. ***** Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, και η γραφική παράσταση της f ΄ φαίνεται στο σχήμα, τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω. **Σ** **Λ**



50. ***** Μια πολυωνυμική συνάρτηση 3ου βαθμού έχει οπωσδήποτε σημείο καμπής. **Σ** **Λ**

51. ***** Μια πολυωνυμική συνάρτηση 4ου βαθμού έχει τουλάχιστον ένα σημείο καμπής. **Σ** **Λ**

52. ***** Η f παρουσιάζει στο x_0 σημείο καμπής.



Σ **Λ**

53. ***** Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και η f είναι κυρτή στο Δ, τότε $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$. **Σ** **Λ**

54. ***** Το σημείο Α $(x_0,\ f(x_0))$ είναι σημείο καμπής μιας συνάρτησης f, όταν η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0. **Σ** **Λ**

55. ***** Η συνάρτηση $f(x) = e^{-x}$ είναι κυρτή στο R. **Σ** **Λ**

56. ***** Η ευθεία x = 2 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, με $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{(x-2)^2}$. **Σ** **Λ**

57. ***** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x^5 + x^3 - 2}{x^2 + x + 2004}$ έχει μια πλάγια ασύμπτωτη. **Σ** **Λ**

58. ***** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ έχει δύο κατακόρυφες ασύμπτωτες. **Σ** **Λ**

59. ***** Ισχύει $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{συν}x}{x - \frac{\pi}{2}} = -1$. **Σ** **Λ**

60. ***** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^{-x}$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$. **Σ** **Λ**

61. ***** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, τότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη. **Σ** **Λ**

62. ***** Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία x = 0. **Σ** **Λ**

63. ***** Η συνάρτηση $f(x) = e^{x}$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία y = 0. **Σ** **Λ**

<u>Απαντήσεις</u>

1Λ, 2Σ, 3Λ, 4Σ, 5Σ ,6Σ ,7Σ, 8Σ, 9Σ, 10Σ, 11Σ, 12Σ, 13Λ, 14Σ, 15Λ, 16Λ, 17Λ, 18Λ,19Σ, 20Σ, 21Σ 22Λ, 23Σ, 24Λ, 25Λ, 26Λ, 27Λ, 18Σ, 29Λ, 30Σ, 31Σ, 32Λ, 33Σ, 34Λ, 35Σ,Σ,Σ, 36Σ, 37Λ, 38Λ, 39Σ, 40Σ, 41Σ, 42Σ, 43Λ, 44Σ, 45Σ,Λ,Σ, 46Λ, 47Σ, 48Σ, 49Σ, 50Σ, 51Λ, 52Λ, 53Σ, 54Λ, 55Σ, 56Σ, 57Λ, 58Σ, 59Σ, 60Λ, 61Σ, 62Σ, 63Σ.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. ***** Έστω μια συνάρτηση f για την οποία ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα [α, β]. Τότε θα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $(\xi, f(\xi))$

Α. να είναι παράλληλη με τον άξονα y´y

Β. να έχει συντελεστή διεύθυνσης μηδέν

Γ. να έχει συντελεστή διεύθυνσης ένα

Δ. να είναι παράλληλη με την ευθεία y = x

Ε. να μην ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης

2. ***** Μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα [α, β]. Το θεώρημα μέσης τιμής ισχύει για την f, όταν

Α. η f είναι συνεχής στο [α, β]

Β. η f έχει ίσες τιμές στα σημεία α και β

Γ. η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β)

Δ. η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και συνεχής στα α και β

Ε. η f είναι συνεχής στο (α, β)

3. ***** Δίνεται η συνάρτηση f (x) = c, με πεδίο ορισμού το [α, β]. Το πλήθος των σημείων $\xi \in (\alpha, \beta)$ που προκύπτουν από το θεώρημα του Rolle είναι

Α. 1 **Β.** 2 **Γ.** το πολύ 2 **Δ.** κανένα **Ε.** άπειρο

4. ***** Για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x$, $x \in [-1, 2]$, το πλήθος των αριθμών $\xi \in (-1, 2)$ που προκύπτουν από το θεώρημα της μέσης τιμής είναι

Α. τουλάχιστον τρεις **Β.** ακριβώς ένας

Γ. τουλάχιστον δύο **Δ.** ακριβώς δύο **Ε.** κανένας

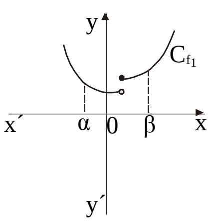
5. ***** Το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού για τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$, για κάθε $x_1, x_2 > 0$, εξασφαλίζει ένα ξ μεταξύ των x_1, x_2 ώστε να ισχύει

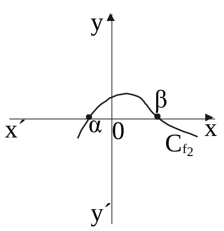
Α. $\ln \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{\xi}{x_1 - x_2}$ **Β.** $\ln \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{x_1 - x_2}{\xi}$

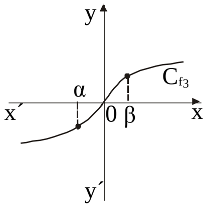
Γ. $\ln (x_1 - x_2) = \dfrac{1}{\xi}(x_1 - x_2)$ **Δ.** $\ln \dfrac{x_1}{x_2} = \xi (x_1 - x_2)$

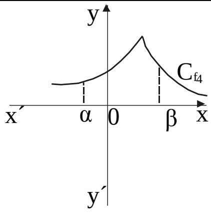
Ε. $\ln (x_1 - x_2) = \xi (x_1 - x_2)$

6. ***** Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f_1, f_2, f_3, f_4.









Αυτές που ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο [α, β] είναι οι

Α. f_2 και f_4 **Β.** μόνο η f_4 **Γ.** μόνο η f_2 **Δ.** f_2 και f_3 **Ε.** f_1 και f_4

7. ***** Οι συναρτήσεις f, g ορίζονται στο R και είναι δύο φορές παραγωγίσιμες σ' αυτό. Αν f ΄ (x) = g ΄ (x) για όλα τα x ∈ R, ποια από τις παρακάτω συνθήκες πρέπει να ισχύει επιπλέον, ώστε f (x) = g (x), για όλα τα x ∈ R;

Α. f και g συνεχείς στο R **Β.** f (0) = g (0)

Γ. f ΄΄ (x) = g ΄΄ (x) + c **Δ.** f ΄΄ (0) = g ΄΄ (0)

Ε. δεν χρειάζεται να προστεθεί άλλη συνθήκη

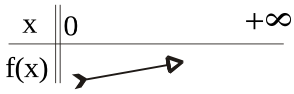
8. ***** Αν για τις παραγωγίσιμες στο R συναρτήσεις f, g ισχύει f ΄ (x) = g ΄ (x), x ∈ R, τότε

Α. f (x) = g (- x) + c **Β.** f (x) = - g (x) + c **Γ.** f (x) = g (x) - c

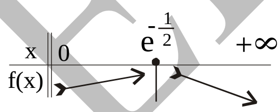
Δ. f (x) + g (- x) = c **Ε.** f (- x) = g (x) + c

9. ***** Αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το (0, + ∞) έχει παράγωγο την f ΄ (x) = 2lnx + 1, τότε για τη μονοτονία της f ισχύει

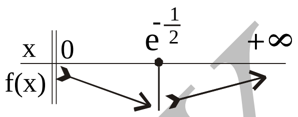
Α.



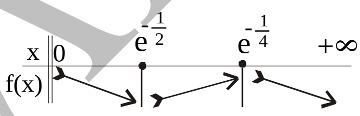
Β.



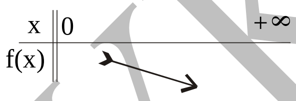
Γ.



Δ.



Ε.



10. ***** Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και γνησίως φθίνουσα, τότε

Α. f ΄ (x) > 0, για κάθε x ∈ R

Β. f ΄ (x) ≥ 0, για κάθε x ∈ R

Γ. f ΄ (x) ≤ 0, για κάθε x ∈ R

Δ. f ΄ (x) < 0, για κάθε x ∈ R

Ε. η f ΄ (x) δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R

11. ***** Η παράγωγος f ΄ της συνάρτησης f είναι ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού. Η f έχει

Α. τρία ακριβώς τοπικά ακρότατα

Β. ένα ολικό μέγιστο και ένα ολικό ελάχιστο

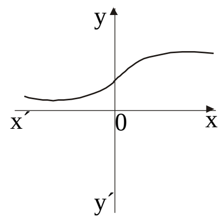
Γ. τουλάχιστον τρία τοπικά ακρότατα

Δ. ένα μόνο τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο

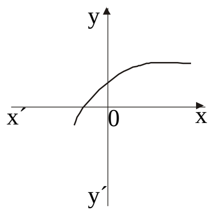
Ε. τρία το πολύ τοπικά ακρότατα

12. ****** Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο R και η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα στο R. Η γραφική παράσταση της f θα μπορούσε να έχει τη μορφή

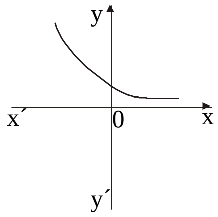
Α.



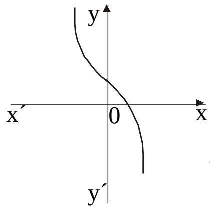
Β.



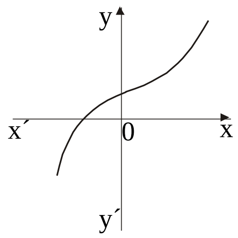
Γ.



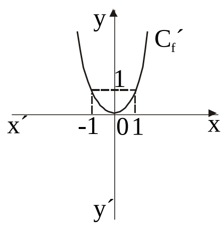
Δ.



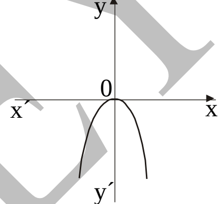
Ε.



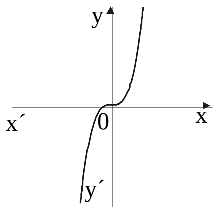
13. ***** Η γραφική παράσταση C_f΄ της παραγώγου μιας συνάρτησης φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η γραφική παράσταση της f μπορεί να είναι



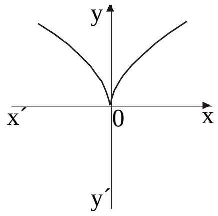
Α.



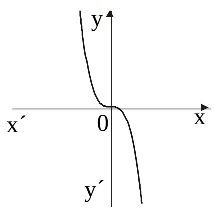
Β.



Γ.

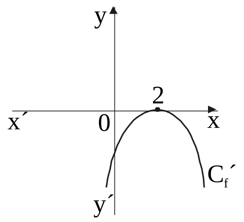


Δ.



Ε. καμία από τις προηγούμενες

14. ***** Η γραφική παράσταση $C_f΄$ της παραγώγου μιας συνάρτησης φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε ισχύει ότι



Α. η f είναι γνησίως αύξουσα στο (- ∞, 2]

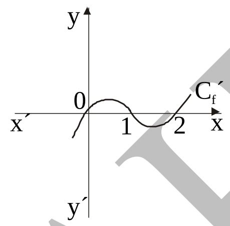
Β. η f είναι γνησίως φθίνουσα μόνο στο [2, + ∞)

Γ. η f έχει τοπικό μέγιστο το σημείο $x_0 = 2$

Δ. η f έχει τοπικό ελάχιστο το σημείο $x_0 = 2$

Ε. η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R

15. ***** Το διάγραμμα $C_f΄$της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε **δεν** ισχύει ότι



Α. η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0, 1]

Β. η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [1, 2]

Γ. η f έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο με x = 0

Δ. η f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο με x = 1

Ε. η f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο με x = 2

16. ***** Έστω μια συνεχής συνάρτηση f, η οποία στρέφει τα κοίλα προς τα άνω σ' ένα διάστημα Δ. Τότε καθώς το x αυξάνει, η κλίση της C_f

Α. αυξάνει **Β.** ελαττώνεται **Γ.** μένει σταθερή

Δ. είναι μηδέν **Ε.** δεν μπορούμε να απαντήσουμε

17. ***** Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω σ' ένα διάστημα Δ, τότε

Α. $f΄΄(x) > 0$, για κάθε $x \in \Delta$

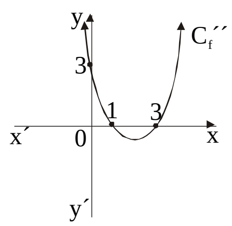
Β. $f΄΄(x) < 0$, για κάθε $x \in \Delta$

Γ. $f΄΄(x) \leq 0$, για κάθε $x \in \Delta$

Δ. $f΄΄(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \Delta$

Ε. δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το πρόσημο της $f΄΄(x)$ στο Δ

18. ***** Το διάγραμμα $C_f΄΄$ της δεύτερης παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η f ΄ είναι γνησίως φθίνουσα στο



Α. (- ∞, 1] **Β.** [1, 3] **Γ.** [3, + ∞)

Δ. R **Ε.** (- ∞, - 3]

19. ***** Η συνάρτηση f ορίζεται σε ένα διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$. Θεωρούμε τις προτάσεις:

I. Η C_f δέχεται εφαπτομένη στο A $(x_0, f(x_0))$

II. Η f ΄ αλλάζει πρόσημο στο x_0

III. Η f ΄΄ αλλάζει πρόσημο στο x_0

Τότε το A $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f αν ισχύουν οι προτάσεις

Α. Ι και ΙΙ **Β.** Ι και ΙΙΙ **Γ.** ΙΙ και ΙΙΙ

Δ. μόνο η ΙΙΙ **Ε.** μόνο η Ι

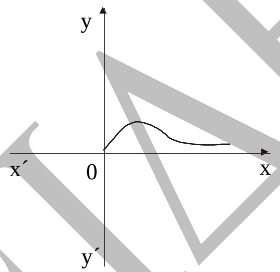
20. ***** Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R, μπορεί να έχει πλήθος πλάγιων ασυμπτώτων

Α. το πολύ τρεις **Β.** το πολύ δύο **Γ.** το πολύ μία

Δ. εξαρτάται από το πλήθος των οριζοντίων ασυμπτώτων

Ε. δεν υπάρχει περιορισμός για το πλήθος

21. ***** Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = xe^{-\alpha x}$ με $\alpha > 0$ και $x \in [0, +\infty)$. Για όλες τις συναρτήσεις f ισχύει ότι



Α. έχουν μόνο 1 τοπικό ακρότατο

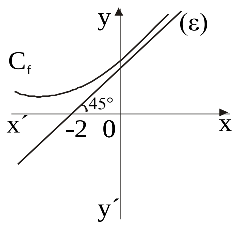
Β. το 0 είναι σημείο καμπής

Γ. η ευθεία x = 0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

Δ. η ευθεία y = 0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη

Ε. όλα τα παραπάνω

22. ****** Η ευθεία (ε) είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f. Τότε ισχύει ότι



Α. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ **Β.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$

Γ. $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$ **Δ.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 1$

Ε. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

23. ****** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, τότε η γραφική της παράσταση μπορεί να έχει

Α. δύο πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$

Β. οριζόντια και πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

Γ. κατακόρυφες ασύμπτωτες

Δ. πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$

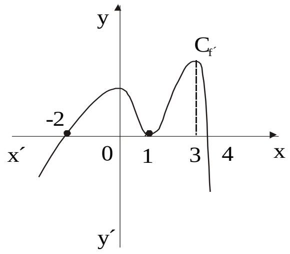
Ε. οριζόντια και πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$

24. ***** Η ευθεία y = x + 1 είναι πλάγια ασύμπτωτη της

Α. $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 5}{2x^2 + 3}$ **Β.** $g(x) = x^4 + 5x$ **Γ.** $h(x) = \dfrac{1 + x^2 + x}{x}$

Δ. $\varphi(x) = e^x - 1$ **Ε.** $\kappa(x) = x + \eta\mu x$

25. * Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f ΄ μιας συνάρτησης f στο R. Τότε για τη συνάρτηση f ισχύει



Α. στο διάστημα [- 2, 0] η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω

Β. στο διάστημα [1, 3] ισχύει f ΄΄(x) = 0

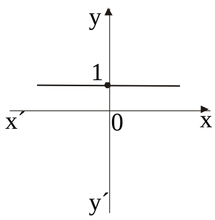
Γ. στο διάστημα [0, 1] η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω

Δ. στο διάστημα [- 2, 1] η f είναι γνησίως φθίνουσα

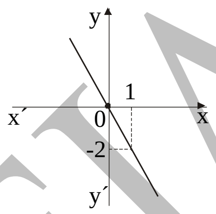
Ε. όλα τα παραπάνω

26. * Αν μια συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω, τότε η γραφική παράσταση της f ΄ μπορεί να είναι η

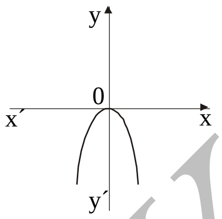
Α.



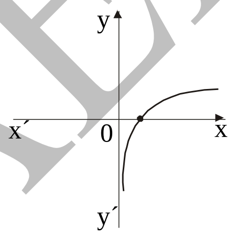
Β.



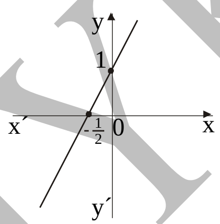
Γ.



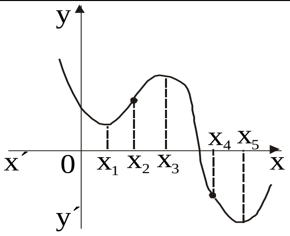
Δ.



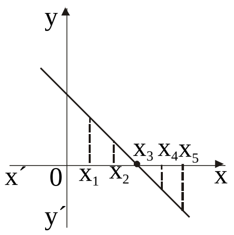
Ε.



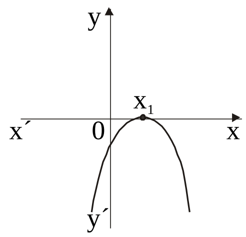
27. ***** Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f. Η γραφική παράσταση της f ΄ μπορεί να είναι



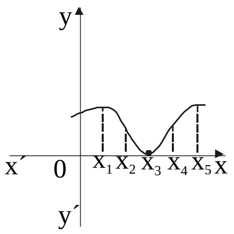
Α.



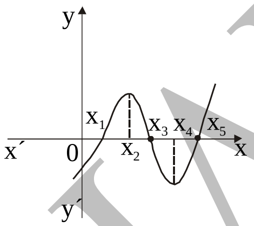
Β.



Γ.

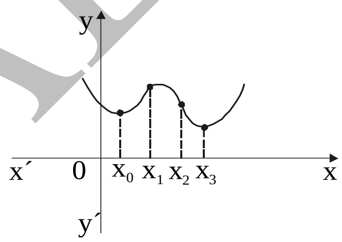


Δ.



Ε. καμία από αυτές

28. ***** Αν η γραφική παράσταση της παραγωγίσιμης συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε



Α. η f έχει μόνο δύο τοπικά ακρότατα

Β. η f δεν παραγωγίζεται σε όλα τα σημεία του διαστήματος $[x_0, x_3]$

Γ. $f''(x) > 0$ για όλα τα $x \in (x_2, x_3)$

Δ. $f''(x) < 0$ για όλα τα $x \in (x_0, x_1)$

Ε. η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, x_3]$

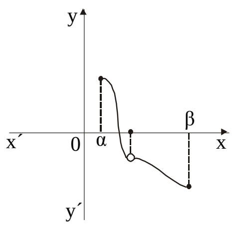
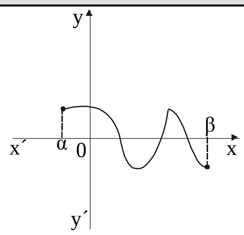
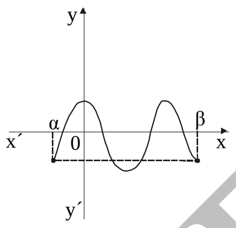
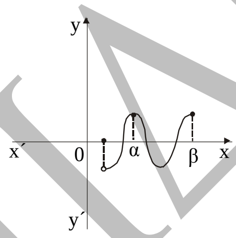
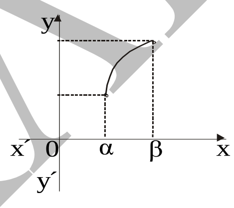
Απαντήσεις

1Β, 2Δ, 3Ε, 4Β, 5Β, 6Γ, 7Β, 8Γ, 9Γ, 10Γ, 11Ε, 12Γ, 13Β, 14Ε, 15Ε,
16Α, 17Δ, 18Β, 19Β, 20Β, 21Δ, 22Δ, 23Δ, 24Γ, 25Γ, 26Β, 27Δ, 28Γ

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

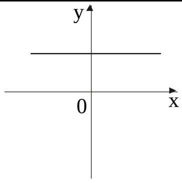
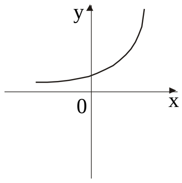
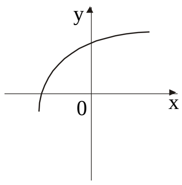
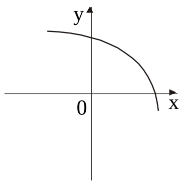
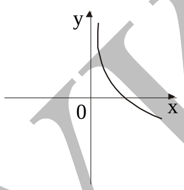
1. ***** Να αντιστοιχίσετε κάθε θεώρημα της στήλης Α του πίνακα Ι σε όσες συναρτήσεις της στήλης Β μπορεί να εφαρμοστεί στο [α, β], συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	Στήλη Β
1. Θεώρημα Bolzano	 **α.**  **β.**
2. Θεώρημα Rolle	 **γ.**  **δ.**
3. Θεώρημα μέσης τιμής	 **ε.**

2. ***** Κάθε συνάρτηση τη στήλης Α του πίνακα Ι να την αντιστοιχίσετε στις σχέσεις που ισχύουν γι' αυτήν από τη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. 	**α.** $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$
2. 	**β.** $f'(x) < 0$ και $f''(x) < 0$
3. 	**γ.** $f'(x) > 0$ και $f''(x) < 0$
4. 	**δ.** $f'(x) < 0$ και $f''(x) > 0$
5. 	**ε.** $f'(x) = 0$
	ζ. $f'(x) = 0$ και $f''(x) > 0$

Πίνακας ΙΙ

1	**2**	**3**	**4**	**5**
ε	**α**	**γ**	**β**	**δ**

3. * Στη στήλη Α του πίνακα Ι γράφονται συναρτήσεις. Στη στήλη Β γράφονται τα σημεία που προκύπτουν από την εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής για κάθε συνάρτηση. Να κάνετε την αντιστοίχιση, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	**Στήλη Β**
συνάρτηση και διάστημα	***σημείο που προκύπτει***
1. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1,\ x \in [0, 1]$	**α.** $\frac{1}{2}e - 1$
2. $f(x) = \frac{1}{x},\ x \in [-2, -1]$	**β.** $-\frac{1}{2}$
3. $f(x) = \ln x,\ x \in [1, e]$	**γ.** $e - 1$
4. $f(x) = \frac{x+1}{x-1},\ x \in [-1, 0]$	**δ.** $-\sqrt{2}$
	ε. $\frac{1}{2}$
	ζ. $e - 2$
	η. $\frac{1}{4}$
	θ. $1 - \sqrt{2}$

Πίνακας ΙΙ

1	**2**	**3**	**4**
ε	**γ**	**δ**	**θ**

4. * Σε κάθε σχέση της στήλης Α αντιστοιχεί ένα γράφημα από τη στήλη Β του πίνακα Ι. Να κάνετε την αντιστοίχιση, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ (οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο R).

Πίνακας Ι

Στήλη Α

1. $(f(x) - g(x))' > 0$

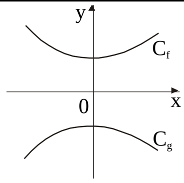
2. $(f(x) - g(x))' = 0$

3. $(f(x) - g(x))' < 0$

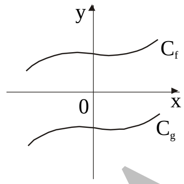
4. $(f(x) - g(x))' > 0$, για $x > 0$
και
$(f(x) - g(x))' < 0$, για $x < 0$

Στήλη Β

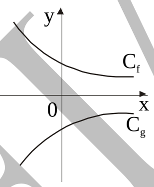
α.



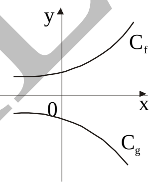
β.



γ.



δ.

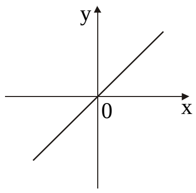
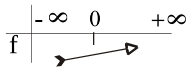
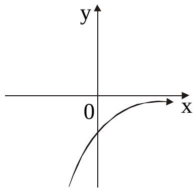
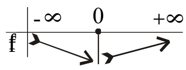
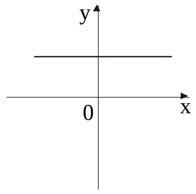
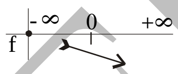
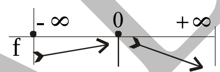
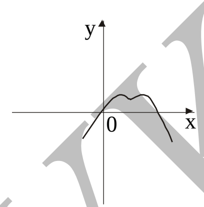
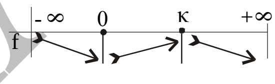


Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4
δ	β	γ	α

5. * Κάθε γραφική παράσταση $C_f{}'$ της στήλης Α του πίνακα Ι να την αντιστοιχίσετε στη μονοτονία από τη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

<table>
<tr><th>Στήλη Α</th><th>Στήλη Β</th></tr>
<tr><th>$C_f{}'$</th><th>μονοτονία της f</th></tr>
<tr><td>1. </td><td>α. σταθερή συνάρτηση
β. </td></tr>
<tr><td>2. </td><td>γ. </td></tr>
<tr><td>3. </td><td>δ. 
ε. </td></tr>
<tr><td>4. </td><td>στ. </td></tr>
</table>

Πίνακας ΙΙ

1	**2**	**3**	**4**
γ	**δ**	**β**	**στ**

6. * Να αντιστοιχίσετε σε κάθε συνάρτηση της στήλης Α του πίνακα Ι, το πλήθος των σημείων καμπής που αναφέρεται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

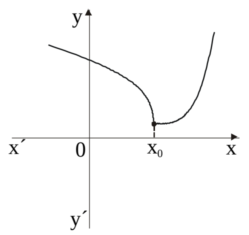
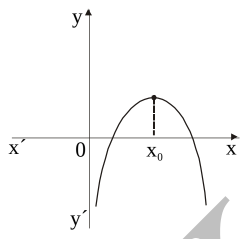
Στήλη Α	Στήλη Β
1. $f(x) = \ln x,\ x > 0$	**α.** 2
	β. 0
2. $g(x) = ημx,\ x \in R$	**γ.** 4
3. $h(x) = 5x^3 + x + 1,\ x \in R$	**δ.** άπειρα
	ε. 1
4. $t(x) = x^4 - 2x^3,\ x \in R$	**στ.** 3

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4
β	δ	ε	α

7. ***** Να συμπληρώσετε τον πίνακα ΙΙ, έτσι ώστε σε κάθε γραφική παράσταση συνάρτησης της στήλης Α του πίνακα Ι, και η οποία δεν παρουσιάζει καμπή στο σημείο x_0, να αντιστοιχεί η σχέση που ισχύει από τη στήλη Β.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	Στήλη Β
1. 	**α.** η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0
	β. η f δεν αλλάζει είδος κυρτότητας στο x_0
2. 	**γ.** η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο R

Πίνακας ΙΙ

1	2
α	**β**

8. * Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α του πίνακα Ι στις ασύμπτωτές της (αν υπάρχουν), που γράφονται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

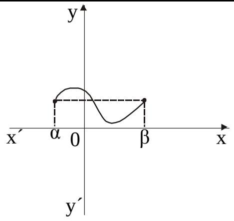
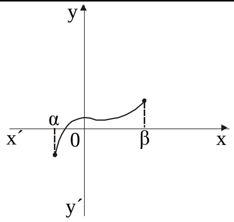
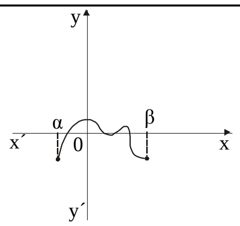
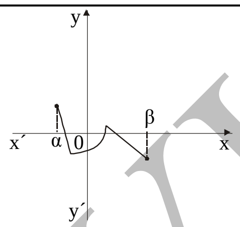
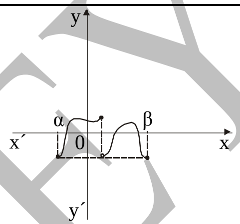
Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. $f(x) = \dfrac{2x+1}{2x-4}$	**α.** κατακόρυφη $x = 1$ οριζόντια $y = -2$
	β. δεν υπάρχουν
2. $f(x) = \dfrac{3x^3+5x^2+7}{x^2+1}$	**γ.** κατακόρυφη $x = 2$ οριζόντια $y = 1$
3. $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + 6$	**δ.** πλάγια $y = 5x + 3$
	ε. πλάγια $y = 3x + 5$
4. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$	**στ.** κατακόρυφη $x = 0$ οριζόντια $y = 0$

Πίνακας ΙΙ

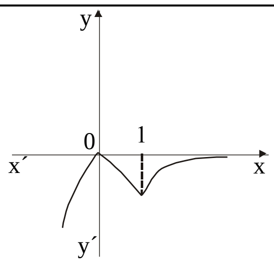
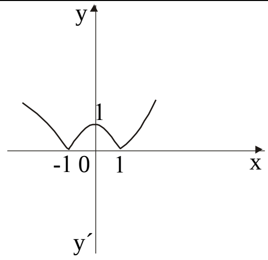
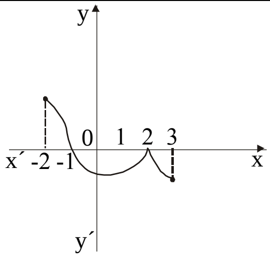
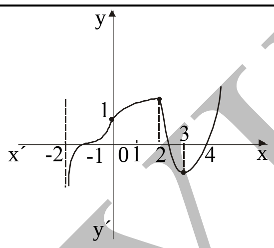
1	**2**	**3**	**4**
γ	**ε**	**β**	**στ**

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

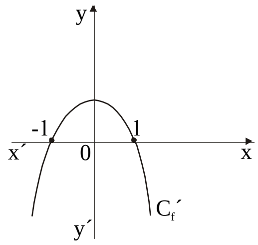
1. * Να συμπληρώσετε κάθε στήλη του παρακάτω πίνακα με ΝΑΙ αν ισχύει το αντίστοιχο θεώρημα ή με ΟΧΙ αν δεν ισχύει:

Γραφική ***παράσταση***	***Θεώρημα Bolzano***	***Θεώρημα Rolle***	***Θεώρημα μέσης τιμής***
			
			
			
			
			

2. * Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

<table>
<tr><th>Γραφική παράσταση
συνάρτησης f</th><th>Πίνακας Μεταβολών συνάρτησης f</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

3. * Δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f ΄ μιας συνάρτησης f.

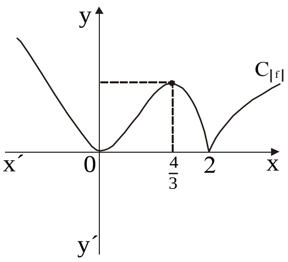


α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα για τη μονοτονία της f:

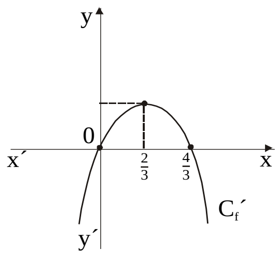
x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
f ΄ (x)	
f (x)	

β) Να σχεδιάσετε μια πιθανή γραφική παράσταση της f.

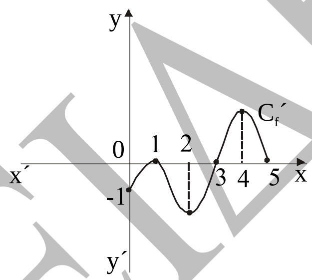
4. ***** Στα σχήματα Ι και ΙΙ έχουμε τις γραφικές παραστάσεις των |f| και f ΄ αντίστοιχα. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.



I



II



5. ***** Η γραφική παράσταση $C_f΄$ της παραγώγου μιας συνάρτησης f φαίνεται στο σχήμα. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

	Διάστημα [0, 1]	Διάστημα [1, 2]	Διάστημα [2, 3]	Διάστημα [3, 4]	Διάστημα [4, 5]
Πρόσημο της f ΄					
Μονοτονία της f					
Μονοτονία της f ΄					
Είδος κυρτότητας της f					
	$x_0 = 1$	$x_0 = 2$	$x_0 = 3$	$x_0 = 4$	$x_0 = 5$
Ακρότατα της f					
Σημεία καμπής της f					

Ερωτήσεις διάταξης

1. ***** Να διατάξετε με αύξουσα σειρά τις τετμημένες των ακροτάτων και των σημείων καμπής της συνάρτησης $f(x) = (x - 1)^3 (x + 1)^3$.

2. ***** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 1$ και τα διαστήματα [-2, -1], [- 1, 0], [0, 1], [1, 2]. Να βρείτε τους αριθμούς $ξ_1$, $ξ_2$, $ξ_3$, $ξ_4$ που προκύπτουν από την εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στα παραπάνω διαστήματα. Να διατάξετε τους παραπάνω αριθμούς με φθίνουσα σειρά.

3. ***** Αν μια συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα κάτω στο R και $x_1 < x_2$, να διατάξετε τους αριθμούς $f'(x_1)$, $f'(x_2)$, $f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$.