

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ον/μο:.....

49

Ύλη : Αλγεβρικές παραστάσεις
Ισότητα τριγώνων

Γ' Γυμνασίου
13-01-13

Θέμα 1^ο :

A. i. Τι ονομάζουμε παραγοντοποίηση ;

ii. Τι ονομάζουμε Ε.Κ.Π (Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο)
δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων ;

iii. Τι ονομάζουμε ρητή αλγεβρική παράσταση ;

iv. Να διατυπώσετε το Γ-Π-Γ (Γωνία – Πλευρά-Γωνία).

(4x5=20 μον.)

B. Να χαρακτηρίσετε με (Σ) Σωστό ή (Λ) Λάθος τις παρακάτω προτάσεις .

i. $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$.

Σ Λ

ii. $(\alpha + \beta)^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$.

Σ Λ

iii. $\frac{x-2}{x-3} : \left(\frac{x-3}{x-2}\right)^{-1} = 1$.

Σ Λ

iv. Κάθε περιττός αριθμός α , έχει τη μορφή
 $\alpha = 2\kappa + 1$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Σ Λ

v. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και μια γωνία ίση τότε είναι ίσα .

Σ Λ

(5x1=5 μον.)

Θέμα 2^ο :

A. Να κάνετε τις πράξεις : $(2x - 1)^3 - (x - 1)(x^2 + x + 1)$.

(4 μον.)

B. i. Να δείξετε ότι $(v - 2)(v + 2) + 4 = v^2$.

(4 μον.)

ii. Να δείξετε ότι ο αριθμός : $998 \cdot 1002 + 4$ είναι
τετράγωνο ενός ακέραιου αριθμού τον οποίο και να
προσδιορίσετε .

(2 μον.)

Γ. Αν $x + y = 3$ και $xy = -2$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i. $x^2 + y^2$ ii. $x^3 + y^3$

(2x3,5=7 μον.)

Δ. i. Δίνονται οι παραστάσεις $A = (x - 1)(x + 2)$ και $B = x(x + 1)$

Να αποδείξετε ότι : $B = A + 2$ και $AB + 1 = (A + 1)^2$. (5 μον.)

ii. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση : $x(x^2 - 1)(x + 2) + 1$.

(3 μον.)

Θέμα 3^ο :

A. Να βρείτε το Ε.Κ.Π και το Μ.Κ.Δ των παραστάσεων :

$x^3 - 4x, \quad x^2y - 4xy + 4y, \quad x^3 - 8$ (3 μον.)

B. Να κάνετε τις πράξεις :

i. $\frac{x^2 - 49}{x^2} : \frac{\alpha x - 7\alpha}{x}$

ii. $\left(\frac{x}{x+3} : \frac{x-1}{x+3} \right) \cdot \frac{x^2}{x+1}$

(2x4=8 μον.)

Γ. Να κάνετε τις πράξεις : $\left(\frac{1}{x-2} + \frac{6}{4-x^2} - \frac{2}{x+2} \right) : \left(\frac{x^2+4}{x^2-4} + 1 \right)$

(7 μον.)

Δ. Να αποδείξετε ότι :

i. $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

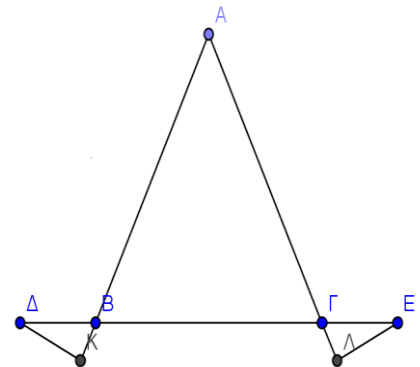
(5 μον.)

ii. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2012 \cdot 2013} = \frac{2012}{2013}$

(2 μον.)

Θέμα 4^ο :

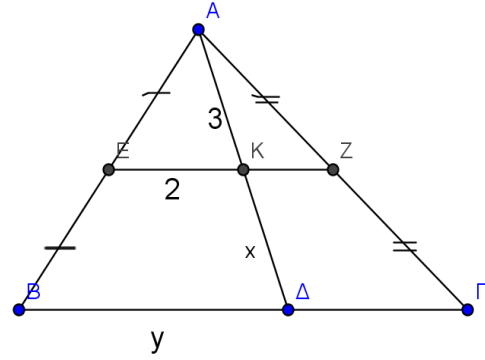
A. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με κορυφή το Α, ΒΔ=ΓΕ και ΔΚ ⊥ ΑΒ, ΕΛ ⊥ ΑΓ. Να αποδείξετε ότι τα Δ, Ε ισαπέχουν από τις ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα.



(13 μον.)

B. Στο διπλανό σχήμα :

- i.** Να υπολογίσετε το x και το y .
- ii.** Να δείξετε ότι τα τμήματα AB , $A\Delta$ είναι ανάλογα προς τα τμήματα AE , AK .



(2x6=12 μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(Ενδεικτικές)

Θέμα 1^ο :

- A.i.** Παραγοντοποίηση λέγεται η διαδικασία με την οποία μια παράσταση που είναι άθροισμα , μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων .
- ii.** Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται , το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του .
- iii.** Ρητή αλγεβρική παράσταση ονομάζουμε μια αλγεβρική παράσταση που είναι κλάσμα και οι όροι του είναι πολυώνυμα .
- iv.** Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία , τότε είναι ίσα .

B. i.Λ ii. Λ iii. Σ iv. Σ v.Λ

Θέμα 2^ο :

A. $(2x-1)^3 - (x-1)(x^2+x+1) =$
 $(2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x \cdot 1^2 - 1^3 - (x^3 - 1^3) =$
 $8x^3 - 3 \cdot 4x^2 \cdot 1 + 6x - 1 - x^3 + 1 =$
 $8x^3 - 12x^2 + 6x - x^3 = 7x^3 - 12x^2 + 6x$

- B. i.** Είναι : $(v-2)(v+2) + 4 = v^2 - 4 + 4 = v^2$
- ii.** Για $v=1000$ στο (i) ερώτημα έχουμε ότι :
 $(1000-2)(1000+2) + 4 = 1000^2$ δηλαδή $998 \cdot 1002 + 4 = 1000^2$
 Άρα ο αριθμός $998 \cdot 1002 + 4$ είναι τετράγωνο του 1000.

- Γ. i.** Γνωρίζουμε ότι $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ άρα
 $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$ άρα $x^2 + y^2 = 3^2 - 2 \cdot (-2) = 9 + 4 = 13$
- ii.** Είναι $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$ άρα $x^3 + y^3 = 3 \cdot (13 - (-2)) =$
 $= 3 \cdot 15 = 45$

Δ. i. Έχουμε $B=A+2 \Leftrightarrow x(x+1) = (x-1)(x+2) + 2 \Leftrightarrow$

$$x^2 + x = x^2 + 2x - x - 2 + 2 \Leftrightarrow x^2 + x = x^2 + x \text{ που ισχύει}$$

επίσης, $AB+1 \stackrel{B=A+2}{=} A(A+2)+1 = A^2 + 2A + 1 = (A+1)^2$

ii. Από το (i) ερώτημα έχουμε : $AB+1 = (A+1)^2$ δηλαδή

$$(x-1)(x+2)x(x+1)+1 = [(x-1)(x+2)+1]^2 \Leftrightarrow$$

$$x(x^2-1)(x+2)+1 = (x^2+2x-x-2+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$x(x^2-1)(x+2)+1 = (x^2+x-1)^2$$

Θέμα 3^ο :

A. $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2)$

$$x^2y - 4xy + 4y = y(x^2 - 4x + 4) = y(x-2)^2$$

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

Άρα Ε.Κ.Π = $yx(x-2)^2(x+2)(x^2+2x+4)$

Μ.Κ.Δ = $x-2$

B. i. $\frac{x^2 - 49}{x^2} : \frac{\alpha x - 7\alpha}{x} = \frac{(x-7)(x+7)}{x^2} \cdot \frac{x}{\alpha(x-7)} =$

$$\frac{x(x-7)(x+7)}{x^2 \alpha(x-7)} = \frac{x+7}{x\alpha}$$

ii. $\left(\frac{x}{x+3} : \frac{x-1}{x+3}\right) \cdot \frac{x^2}{x+1} = \left(\frac{x}{x+3} \cdot \frac{x+3}{x-1}\right) \cdot \frac{x^2}{x+1} =$

$$\frac{x^3(x+3)}{(x+3)(x-1)(x+1)} = \frac{x^3}{x^2-1}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma. & \left(\frac{1}{x-2} + \frac{6}{4-x^2} - \frac{2}{x+2} \right) : \left(\frac{x^2+4}{x^2-4} + 1 \right) = \\
 & = \left[\frac{1}{x-2} + \frac{6}{(2-x)(2+x)} - \frac{2}{x+2} \right] : \left[\frac{x^2+4}{(x-2)(x+2)} + 1 \right] = \\
 & = \left[\frac{1}{x-2} - \frac{6}{(x-2)(x+2)} - \frac{2}{x+2} \right] : \left[\frac{x^2+4}{(x-2)(x+2)} + 1 \right] = \\
 & = \left[\frac{x+2}{(x-2)(x+2)} - \frac{6}{(x-2)(x+2)} - \frac{2(x-2)}{(x+2)(x-2)} \right] : \\
 & \left[\frac{x^2+4}{(x-2)(x+2)} + \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)} \right] = \\
 & = \left[\frac{x+2-6-2(x-2)}{(x-2)(x+2)} \right] : \left[\frac{x^2+4+(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)} \right] = \\
 & = \left[\frac{x-4-2x+4}{(x-2)(x+2)} \right] : \left[\frac{x^2+4+x^2-4}{(x-2)(x+2)} \right] = \\
 & = \frac{-x}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{2x^2} = \frac{-x}{2x^2} = -\frac{1}{2x}
 \end{aligned}$$

Δ. i. Θα δείξουμε ότι $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

Έχουμε : $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{x(x+1)} - \frac{x}{x(x+1)} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$

ii. Από το (i) ερώτημα έχουμε :

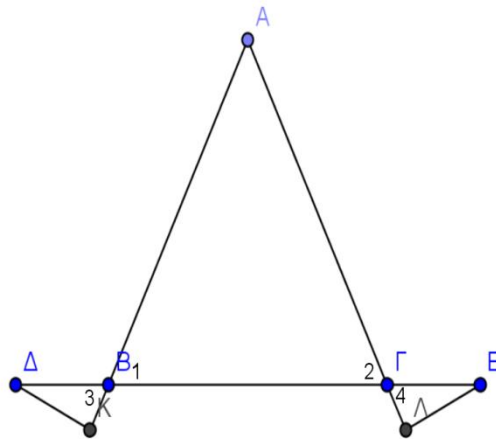
$$\left. \begin{aligned}
 \text{Για } x=1: & \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \\
 \text{Για } x=2: & \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\
 \dots\dots\dots \\
 \text{Για } x=2012: & \frac{1}{2012 \cdot 2013} = \frac{1}{2012} - \frac{1}{2013}
 \end{aligned} \right\}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2012 \cdot 2013} = \\ & = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{2012} + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2013} \\ \text{Άρα } & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2012 \cdot 2013} = \\ & = 1 - \frac{1}{2013} = \frac{2013}{2013} - \frac{1}{2013} = \frac{2012}{2013} \end{aligned}$$

Θέμα 4^ο :

A.

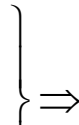


Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $\hat{\Delta}KB$, $\hat{\Gamma}LE$:

1. $\Delta B = \Gamma E$ (Υ)

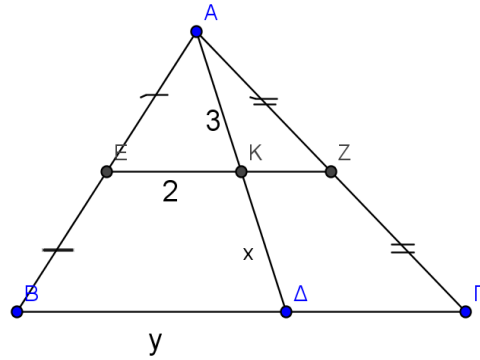
2. $\hat{B}_3 = \hat{\Gamma}_4$ ($\hat{B}_1 = \hat{B}_3$ και $\hat{\Gamma}_2 = \hat{\Gamma}_4$ ως κατακορυφήν.

Όμως $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_2$ ως προσκ.στη βάση ισοσκ.)



Τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα εφόσον έχουν μία πλευρά και μια γωνία αντίστοιχα ίσες. Άρα όλα τους τα στοιχεία είναι ίσα. Επομένως, $\Delta K = \Lambda E$ δηλαδή τα Δ , E ισαπέχουν από τις $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα.

B. i.



Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι E μέσο της AB και Z μέσο της AG .
 Άρα η EZ ενώνει τα μέσα των AB , AG δηλαδή $EZ \parallel B\Gamma$.
 Στο τρίγωνο $AB\Delta$ είναι E μέσο της AB και $EK \parallel B\Delta$. Άρα K μέσο
 της $A\Delta$ δηλαδή $AK = K\Delta \Rightarrow x = 3$. Επίσης, $B\Delta = 2EK \Rightarrow y = 4$.

ii.
$$\frac{AB}{A\Delta} = \frac{2AE}{2AK} = \frac{AE}{AK}$$

εφόσον ο λόγος των AB , $A\Delta$ είναι ίσος με το λόγο των AE , AK έπεται ότι τα τμήματα AB , $A\Delta$ είναι ανάλογα προς τα τμήματα AE , AK .