ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ον/μο:...................... **Γ'Γυμνασίου**

Ύλη : Αλγεβρικές παραστάσεις (§ 1.1-1.5)

Ισότητα τριγώνων (§1.1) **11-11-12**

Θέμα 1ο :

Α. i. Τι ονομάζεται μονώνυμο ; **(3 μον.)**

ii. Ποια η διαφορά της ταυτότητας από την εξίσωση ; **(3 μον.)**

iii. Ποιες είναι οι αξιοσημείωτες ταυτότητες ; Να αποδείξετε μία από αυτές . **(7 μον.)**

iv. Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας τριγώνων . **(6 μον.)**

Β. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις .Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας .

i. Αν $\alpha, \beta \geq 0$, τότε $\sqrt{\alpha+\beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$. **Σ Λ**

ii. $(\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 + \beta^3$. **Σ Λ**

iii. Η παράσταση $2x^3y^{-2}$ είναι μονώνυμο. **Σ Λ**

iv. $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$. **Σ Λ**

v. Αν ο βαθμός του $P(x)$ είναι 3 και ο βαθμός του $Q(x)$ είναι 3 τότε ο βαθμός του $P(x)+Q(x)$ είναι 3. **Σ Λ**

vi. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο οξείες γωνίες ίσες μίας προς μία τότε είναι ίσα . **Σ Λ**

(6x1=6 μον.)

Θέμα 2ο :

Α. Να γράψετε την παράσταση $A = \sqrt{27} + \sqrt{75} - \sqrt{108} + \sqrt{300}$ στη μορφή $A = \alpha\sqrt{3}$. **(8 μον.)**

Β. Αν οι αριθμοί x , y είναι αντίστροφοι , να βρείτε την τιμή της παράστασης $B = (x^{-2}y)^3 \cdot (x^2y^{-1})^2 \cdot 2x^3$. **(8 μον.)**

Γ. Να μετατρέψετε το κλάσμα σε ισοδύναμο με ρητό παρανομαστή **:**

$$\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$$ **(9 μον.)**

Θέμα 3^{o} :

Α. Να προσδιορίσετε την τιμή του φυσικού αριθμού κ , ώστε το μονώνυμο $-2x^{\kappa}y^{3}$

i. Να είναι μηδενικού βαθμού ως προς x . **(3 μον.)**

ii. Να είναι πέμπτου βαθμού ως προς x και y . **(4 μον.)**

Β. i. Αν $P(x)=x^{2}+2x+2, \quad Q(x)=x-3$ **,** να προσδιορίσετε το πολυώνυμο $P(x)\cdot Q(x)$. **(7 μον.)**

ii. Αν $A(x)=\alpha x^{3}+\beta x^{2}+\gamma x+\delta$, να προσδιορίσετε τα α , β , γ , δ ώστε $A(x)=P(x)\cdot Q(x)$. **(8 μον.)**

Γ. Έστω το πολυώνυμο $P(x)=(9x^{2}-6x+1)^{2012}\cdot(3x+1)^{2013}$. Να βρείτε το σταθερό όρο του P(x) . **(3 μον.)**

Θέμα 4^{o} :

Α. Να κάνετε τις πράξεις :

i. $\left[(\alpha+\beta)+3\right]\cdot\left[(\alpha+\beta)-3\right]$

ii. $(\alpha+\beta)^{3}-(\alpha-\beta)^{3}-6\alpha^{2}\beta$

iii. $3x-(x-2)(3x-1)-(x+5)^{2}$

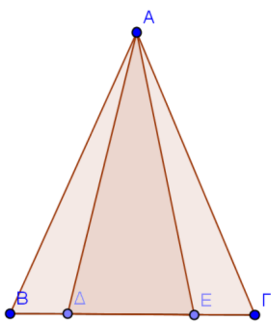
(3x3=9 μον.)

Β. i. Να κάνετε τις πράξεις $(x-4)^{2}-(x-2)(x-8)$ **.**

ii. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης **:**

$A=9996^{2}-9998\cdot 9992$ **(2x3=6 μον.)**

Γ. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση ΒΓ .Αν ΒΔ=ΕΓ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές .



(10 μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(Ενδεικτικές)

Θέμα 1ο :

Α.i. Μονώνυμο λέγεται κάθε ακέραια αλγεβρική παράσταση , που μεταξύ των μεταβλητών σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού .

ii. Ταυτότητα είναι μία ισότητα που επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών της . π.χ $0x = 0$ ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}$.
Εξίσωση είναι μία ισότητα που επαληθεύεται για συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών της π.χ 2x=6 ισχύει για x=3.

iii. Οι αξιοσημείωτες ταυτότητες είναι:

α) Τετράγωνο αθροίσματος: $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

Απόδειξη: $(\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta)(\alpha+\beta) = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 =$
$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

β) Τετράγωνο διαφοράς: $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

Απόδειξη: $(\alpha-\beta)^2 = (\alpha-\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \alpha\beta - \beta\alpha + \beta^2 =$
$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

γ) Κύβος αθροίσματος: $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

Απόδειξη:

$$(\alpha+\beta)^3 = (\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta) = \left(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2\right)(\alpha+\beta) =$$
$$\alpha^3 + \alpha^2\beta + 2\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + \beta^2\alpha + \beta^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

δ) Κύβος διαφοράς: $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

Απόδειξη:

$$(\alpha-\beta)^3 = (\alpha-\beta)^2(\alpha-\beta) = \left(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2\right)(\alpha-\beta) =$$
$$\alpha^3 - \alpha^2\beta - 2\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + \beta^2\alpha - \beta^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

ε) Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά: $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = \alpha^2 - \beta^2$

Απόδειξη: $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = \alpha^2 + \alpha\beta - \beta\alpha - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2$

στ)Διαφορά κύβων: $(\alpha-\beta)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)=\alpha^3-\beta^3$

Απόδειξη:

$$(\alpha-\beta)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)=\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\beta\alpha^2-\alpha\beta^2-\beta^3=\alpha^3-\beta^3$$

ζ)Άθροισμα κύβων: $(\alpha+\beta)\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)=\alpha^3+\beta^3$

Απόδειξη:

$$(\alpha+\beta)\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)=\alpha^3-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2-\alpha\beta^2+\beta^3=\alpha^3+\beta^3$$

iv. <u>1ο κριτήριο ισότητας(Π-Γ-Π)</u>

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση , τότε είναι ίσα.

<u>2ο κριτήριο ισότητας(Γ-Π-Γ)</u>

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

<u>3ο κριτήριο ισότητας(Π-Π-Π)</u>

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Β. **i. Λ .**Είναι $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}=\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$ αλλά **<u>όχι</u>**

$\sqrt{\alpha+\beta}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$.

ii. Σ. Είναι η ταυτότητα άθροισμα κύβων .

iii. Λ. Εφόσον ο εκθέτης του y είναι -2<0 .

iv. Σ . Εφόσον $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \Leftrightarrow$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$.

v. Λ. π.χ. $P(x)=x^3-2,\quad Q(x)=-x^3+2x+2$

Τότε $P(x)+Q(x)=x^3-2-x^3+2x+2=2x\rightarrow 1^{ου}$βαθμού.

vi. Λ. Τότε είναι όμοια .

Θέμα 2ο :

Α. $A=\sqrt{27}+\sqrt{75}-\sqrt{108}+\sqrt{300}=\sqrt{9\cdot 3}+\sqrt{25\cdot 3}-\sqrt{36\cdot 3}+\sqrt{100\cdot 3}=$

$=\sqrt{9}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{25}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{36}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{100}\cdot\sqrt{3}=$

$=3\sqrt{3}+5\sqrt{3}-6\sqrt{3}+10\sqrt{3}=12\sqrt{3}$

άρα η παράσταση γράφτηκε στη μορφή $\alpha\sqrt{3}$, όπου α=12.

Β. $B=(x^{-2}y)^3\cdot(x^2y^{-1})^2\cdot 2x^3=x^{-6}y^3x^4y^{-2}\cdot 2x^3=2xy \underset{xy=1}{\overset{x,y\,\alpha\nu\tau\acute{\iota}\sigma\tau\rho o\varphi o\iota}{=}} 2\cdot 1=2$

Γ. $\dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\dfrac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}=\dfrac{3\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=$

$=\dfrac{3\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{5-2}=\dfrac{3\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{3}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$

Θέμα 3ο :

Α. i. $-2x^{\kappa}y^3$ **.** Για να είναι μηδενικού βαθμού ως προς x πρέπει

$\boxed{\kappa=0}$

ii. $-2x^{\kappa}y^3$ **.** Για να είναι πέμπτου βαθμού ως προς x και y πρέπει

$\kappa+3=5\Leftrightarrow\kappa=5-3\Leftrightarrow\boxed{\kappa=2}$

Β. i. $P(x)\cdot Q(x)=(x^2+2x+2)(x-3)=$

$=x^3-3x^2+2x^2-6x+2x-6=x^3-x^2-4x-6$

ii. $A(x)=P(x)\cdot Q(x)\Leftrightarrow\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=$

$=x^3-x^2-4x-6\Leftrightarrow\boxed{\alpha=1}$, $\boxed{\beta=-1}$, $\boxed{\gamma=-4}$, $\boxed{\delta=-6}$

Γ. $P(x)=(9x^2-6x+1)^{2012}\cdot(3x+1)^{2013}$

Ο σταθερός όρος του $P(x)$ είναι :

$$P(0)=(9\cdot 0^2-6\cdot 0+1)^{2012}\cdot(3\cdot 0+1)^{2013}=1^{2012}\cdot 1^{2013}=1\cdot 1=1$$

<u>Θέμα 4ο</u> :

Α.i. $\left[(\alpha+\beta)+3\right]\cdot\left[(\alpha+\beta)-3\right]=(\alpha+\beta)^2-3^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-9$

ii. $(\alpha+\beta)^3-(\alpha-\beta)^3-6\alpha^2\beta=$

$=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3-(\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3)-6\alpha^2\beta=$

$=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3-\alpha^3+3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2+\beta^3-6\alpha^2\beta=$

$=2\beta^3$

iii. $3x-(x-2)(3x-1)-(x+5)^2=$

$=3x-(3x^2-x-6x+2)-(x^2+10x+25)=$

$=3x-3x^2+x+6x-2-x^2-10x-25=-4x^2-27$

Β. i. $(x-4)^2-(x-2)(x-8)=x^2-8x+16-(x^2-8x-2x+16)=$

$=x^2-8x+16-x^2+10x-16=2x$

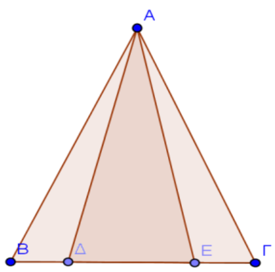
ii. Από το (i) ερώτημα για x=10.000 έχουμε :

$(10.000-4^2)-(10.000-2)(10.000-8)=2\cdot 10.000$ δηλαδή

$9996^2-9998\cdot 9992=20.000$

άρα Α=20.000

Γ. Συγκρίνουμε τα $\overset{\triangle}{AB\Delta}$, $\overset{\triangle}{A\Gamma E}$:



$\left.\begin{array}{l} 1.AB=A\Gamma(\overset{\triangle}{AB\Gamma}:\text{ισοσκελές}) \\ 2.B\Delta=E\Gamma(Y) \\ 3.\hat{B}=\hat{\Gamma}(\text{ως προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς}) \end{array}\right\}$

Άρα από Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, δηλαδή έχουν όλα τους τα στοιχεία ίσα , ένα προς ένα. Επομένως,

ΑΔ=ΔΕ δηλαδή $\overset{\triangle}{A\Delta E}$ είναι ισοσκελές .