

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Όν/μο:.....

Γ' Γυμνασίου

Ύλη: Αλγεβρικές παραστάσεις-Εξισώσεις-Ανισώσεις-
Γεωμετρία

11-03-12

Θέμα 1^ο:

- A. i. Τι ονομάζουμε εξίσωση α' βαθμού ; (3 μον.)
 ii. Να λύσετε την ανίσωση $\alpha x + \beta > 0$ (6 μον.)
 iii. Πότε δύο πολύγωνα είναι όμοια ; (4 μον.)

B. Να απαντήσετε με (Σ) Σωστό ή (Λ) Λάθος στις παρακάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας .

i. Υπάρχει μονώνυμο που είναι ίσο με το αντίθετό του . Σ Λ

ii. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$. Σ Λ

iii. $\frac{\alpha}{\alpha + 2} + \frac{2}{\alpha + 2} = 1$. Σ Λ

iv. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με άγνωστο το x είναι 2^ο βαθμού . Σ Λ

v. Η εξίσωση $\frac{(x-1)^2}{x-1} = 0$ έχει λύση τον αριθμό 1. Σ Λ

vi. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία είναι ίσα . Σ Λ

(6x2=12μον.)

Θέμα 2^ο:

A. Να αποδείξετε ότι : $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) - (2\alpha - \beta)(2\alpha + \beta) + 3\alpha^2 = 0$. (8 μον.)

B. Να δείξετε ότι ο αριθμός $753^2 - 674^2$ είναι πολλαπλάσιο του 79. (5 μον.)

Γ. Να κάνετε τις πράξεις : $\left(\frac{x}{x+3} : \frac{x-1}{x+3} \right) \cdot \frac{x^2}{x+1}$ (12μον.)

Θέμα 3^ο:

A. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $x^2 = 2x$ (2μον.)

ii. $2x^2 - 1 = 0$ (2μον.)

iii. $2x^2 = x + 1$ (3μον.)

iv. $2 - \frac{x^2 + 7x}{x^2 - 1} = \frac{2x - 1}{x + 1} + \frac{3}{1 - x}$ (6μον.)

B.i. Αν $\alpha > 1$ και $\beta < 2$, να αποδείξετε ότι :

α. $(\alpha - 1)(\beta - 2) < 0$ και

β. $\alpha\beta + 2 < 2\alpha + \beta$ (2x2=4μον)

ii. Να λύσετε την ανίσωση : $(3x - 1)^2 - (x - 2)^2 < 8x^2 - 1$ (3μον.)

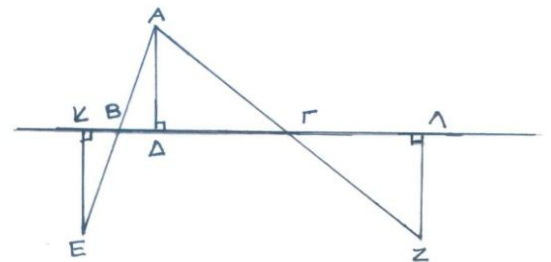
iii. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων :

$$\begin{cases} 3x - 2 > 2x - 1 \\ 5x - 1 < 7x - 5 \end{cases} \quad (5μον.)$$

Θέμα 4^ο:

A. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τρίγωνο ABΓ και το ύψος του ΑΔ. Αν BE=AB, ΓZ=ΑΓ και EK ⊥ ΒΓ, ΖΛ ⊥ ΒΓ να αποδείξετε ότι :

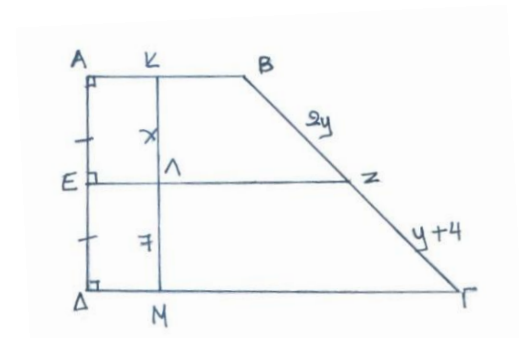
i. EK=ΑΔ ii. ΑΔ=ΛΖ



(2x2=4μον.)

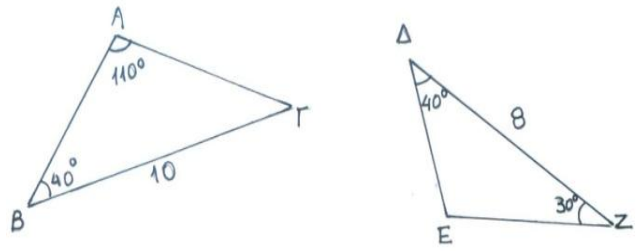
iii. Να εξηγήσετε γιατί τα σημεία E και Z ισαπέχουν από τη ΒΓ . (4μον.)

B. Στο διπλανό σχήμα, να υπολογίσετε το x και το y .



(8μον.)

- Γ.ι.** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι όμοια .
- ii.** Να βρείτε το λόγο των περιμέτρων τους .
- iii.** Να βρείτε το λόγο των εμβαδών τους .



(3x3=9μον)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(Ενδεικτικές)

Θέμα 1^ο:

A.i. Εξίσωση α' βαθμού, ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής
 $αx + β = 0$.

ii. Έχουμε $αx + β > 0 \Leftrightarrow$

$$αx > -β$$

• Αν $α > 0$ τότε $\frac{αx}{α} > -\frac{β}{α} \Leftrightarrow x > -\frac{β}{α}$

• Αν $α < 0$ τότε $\frac{αx}{α} < -\frac{β}{α} \Leftrightarrow x < -\frac{β}{α}$

• Αν $α = 0$ τότε η ανίσωση παίρνει τη μορφή $0x > -β$ οπότε :

* Αν $β > 0$, τότε $-β < 0$ άρα $0x > -β$ αόριστη .

* Αν $β \leq 0$ τότε $-β \geq 0$ άρα $0x > -β$ αδύνατη .

iii. Δύο πολύγωνα είναι όμοια, αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες .

B.i. Σ το μηδενικό μονώνυμο .

ii. Σ από την ταυτότητα κύβος αθροίσματος .

$$(α + β)^3 = α^3 + 3α^2β + 3αβ^2 + β^3$$

iii. Σ $\frac{α}{α+2} + \frac{2}{α+2} = \frac{α+2}{α+2} = 1$.

iv. Λ Πρέπει $α \neq 0$ για να είναι $2^{\text{ου}}$ βαθμού .

v. Λ Η εξίσωση $\frac{(x-1)^2}{x-1} = 0$ έχει νόημα όταν $x-1 \neq 0$ δηλαδή $x \neq 1$.

vi. Σ από τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων .

Θέμα 2^ο:

$$\begin{aligned} \text{A. } & (α - β)(α + β) - (2α - β)(2α + β) + 3α^2 = \\ & = α^2 - β^2 - [(2α)^2 - β^2] + 3α^2 = \\ & = α^2 - β^2 - (4α^2 - β^2) + 3α^2 = \\ & = α^2 - β^2 - 4α^2 + β^2 + 3α^2 = \end{aligned}$$

$$= -3\alpha^2 + 3\alpha^2 = 0$$

B. $753^2 - 674^2 = (753 - 674)(753 + 674) = 79 \cdot 1427$
 άρα πολλαπλάσιο του 79.

Γ.
$$\left(\frac{x}{x+3} : \frac{x-1}{x+3}\right) \cdot \frac{x^2}{x+1} = \left(\frac{x}{x+3} \cdot \frac{x+3}{x-1}\right) \cdot \frac{x^2}{x+1} =$$

$$= \frac{x(x+3)}{(x+3)(x-1)} \cdot \frac{x^2}{x+1} = \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x^2}{x+1} = \frac{x \cdot x^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^3}{x^2-1}$$

Θέμα 3^ο:

A.i. $x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

ii. $2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ ή } x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$

δηλαδή $x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ή
 $x = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

iii. $2x^2 = x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$

$\alpha=2$ $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9 > 0$

$\beta=-1$ Άρα η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες, τις :

$\gamma=-1$ $x_1 = -\frac{\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$

ή
 $x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1-3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

$$\text{iv. } 2 - \frac{x^2 + 7x}{x^2 - 1} = \frac{2x - 1}{x + 1} + \frac{3}{1 - x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{x^2 + 7x}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{2x - 1}{x + 1} - \frac{3}{x - 1}$$

$$Ε.Κ.Π = (x - 1)(x + 1)$$

$$\text{Πρέπει } x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ και } x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$$

Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε :

$$2(x - 1)(x + 1) - (x - 1)(x + 1) \frac{x^2 + 7x}{(x - 1)(x + 1)} =$$

$$= (x - 1)(x + 1) \frac{2x - 1}{x + 1} - (x - 1)(x + 1) \frac{3}{x - 1} \Leftrightarrow$$

$$2(x - 1)(x + 1) - (x^2 + 7x) = (x - 1)(2x - 1) - 3(x + 1) \Leftrightarrow$$

$$2(x^2 - 1) - x^2 - 7x = 2x^2 - x - 2x + 1 - 3x - 3 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 2 - x^2 - 7x - 2x^2 + x + 2x - 1 + 3x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-x^2 - x = 0 \Leftrightarrow -x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

απορρίπτεται . Άρα $x = 0$.

$$\text{B.i.α. } \left. \begin{matrix} \alpha > 1 \\ \beta > 2 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} \alpha - 1 > 0 \\ \beta - 2 < 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow (\alpha - 1)(\beta - 2) < 0 \text{ εφόσον το γινόμενο ενός}$$

θετικού με έναν αρνητικό είναι αρνητικός.

β. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι αν $\alpha > 1$ και $\beta < 2$

$$\text{τότε } (\alpha - 1)(\beta - 2) < 0 \Leftrightarrow \alpha\beta - 2\alpha - \beta + 2 < 0 \Leftrightarrow \alpha\beta + 2 < 2\alpha + \beta$$

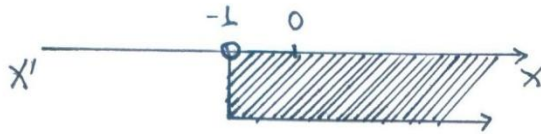
$$\text{ii. } (3x - 1)^2 - (x - 2)^2 < 8x^2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$9x^2 - 6x + 1 - (x^2 - 4x + 4) < 8x^2 - 1 \Leftrightarrow$$

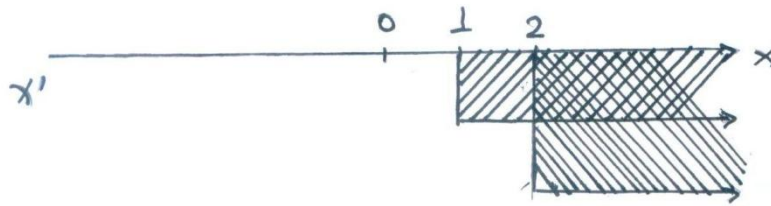
$$9x^2 - 6x + 1 - x^2 + 4x - 4 < 8x^2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$9x^2 - 6x - x^2 + 4x - 8x^2 < -1 + 4 - 1 \Leftrightarrow$$

$$-2x < 2 \Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} > \frac{2}{-2} \Leftrightarrow x > -1$$



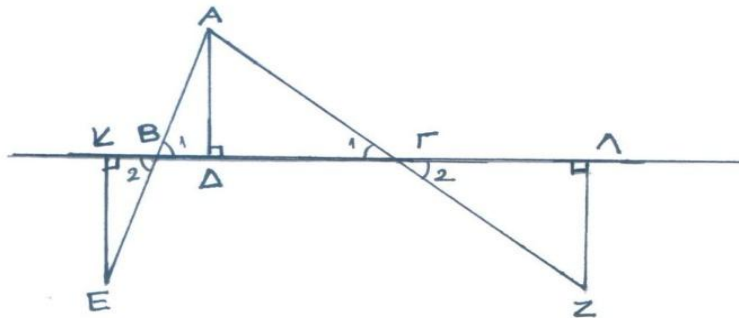
iii. $3x - 2 > 2x - 1 \Leftrightarrow$ και $5x - 1 < 7x - 5 \Leftrightarrow$
 $3x - 2x > -1 + 2 \Leftrightarrow$ και $5x - 7x < -5 + 1 \Leftrightarrow$
 $x > 1$ και $-2x < -4 \Leftrightarrow$
 $\frac{2x}{-2} > \frac{-4}{-2} \Leftrightarrow$
 $x > 2$



Άρα $x > 2$.

Θέμα 4^ο:

A.



i. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα BKE , AΔB :

1. $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ (ως κατακορυφήν) } \Leftrightarrow Τα τρίγωνα έχουν μια πλευρά
 2. $BE = AB$ (Υ)

και μια γωνία αντίστοιχα ίσες
 άρα είναι ίσα , άρα όλα τους
 τα στοιχεία ίσα , άρα $EK = A\Delta$ (1)

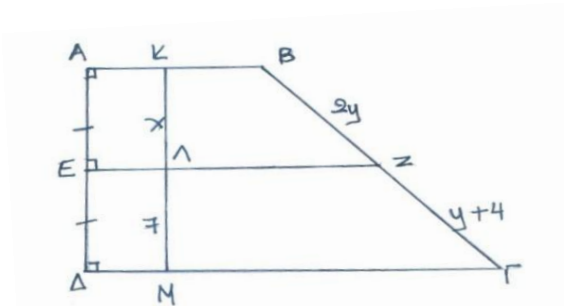
ii. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $\Lambda\Delta\Gamma$, $\Gamma\Lambda Z$:

$$\left. \begin{array}{l} 1. \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2 \text{ (ως κατακορυφήν)} \\ 2. \Lambda\Gamma = \Gamma Z \text{ (Y)} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \text{Τα τρίγωνα έχουν μια πλευρά και}$$

μια γωνία αντίστοιχα ίσες άρα είναι ίσα άρα όλα τους τα στοιχεία ίσα , άρα $\Lambda\Delta = \Lambda Z$ (2)

iii. Από (1) , (2) έπεται ότι $EK = \Lambda\Delta = \Lambda Z$ άρα $EK = \Lambda Z$ δηλαδή τα E και Z ισαπέχουν από τη ΒΓ .

B.

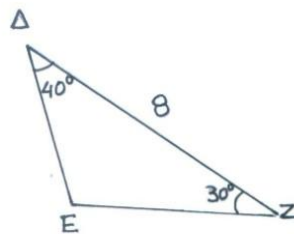
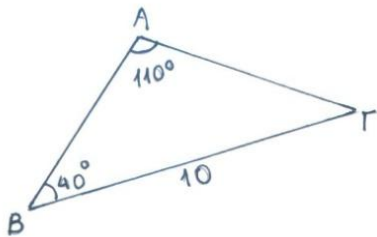


Εφόσον AB , EZ , $\Delta\Gamma$ κάθετες στην $A\Delta$ έπεται ότι είναι παράλληλες . Άρα εφόσον οι τρεις αυτές παράλληλες ορίζουν ίσα τμήματα στην $A\Delta$, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει , δηλαδή και στις KM , $B\Gamma$. Άρα :

$$K\Lambda = \Lambda M \Leftrightarrow x = 7$$

$$BZ = Z\Gamma \Leftrightarrow 2y = y + 4 \Leftrightarrow 2y - y = 4 \Leftrightarrow y = 4$$

Γ.



i. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 110^\circ + 40^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 180^\circ - 150^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$

Άρα τα τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle EZ$ έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία ,
 δηλαδή είναι όμοια .

ii. Ο λόγος των περιμέτρων τους θα είναι ίσος με το λόγο ομοιότητάς τους . Για το λόγο ομοιότητας έχουμε :

$$\lambda = \frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{\Delta Z} = \frac{A\Gamma}{EZ} \text{ δηλαδή } \lambda = \frac{10}{8} = \frac{10:2}{8:2} = \frac{5}{4}$$

$$\text{Άρα } \frac{\text{Π}_{\triangle AB\Gamma}}{\text{Π}_{\triangle EZ}} = \lambda = \frac{5}{4}$$

iii. Ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους .

$$\text{Άρα } \frac{E_{\triangle AB\Gamma}}{E_{\triangle EZ}} = \lambda^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

