

## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ον/μο:.....

Γ' Γυμνασίου

Ύλη: Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup>: Αλγεβρικές παραστάσεις

16-01-12

**Θέμα 1<sup>ο</sup>:**

Α. Να συμπληρώσετε τα κενά:

α. Αν  $\alpha, \beta \geq 0$ , τότε  $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \dots\dots\dots$ .β. Αν το πολυώνυμο  $P(x)$  έχει βαθμό 0 και το πολυώνυμο  $Q(x)$  έχει βαθμό 3, τότε το πολυώνυμο  $P(x) \cdot Q(x)$  έχει βαθμό  $\dots\dots\dots$ .γ.  $(\alpha + \beta)^3 = \dots\dots\dots$ .δ.  $\dots\dots\dots$  αλγεβρική παράσταση λέγεται μια αλγεβρική παράσταση που είναι το κλάσμα και οι όροι του είναι πολυώνυμο.

(3x4=12μον.)

Β.α. Τι ονομάζουμε παραγοντοποίηση;

(7 μον.)

β. Τι ονομάζουμε Μ.Κ.Δ (Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων;

(6 μον.)

**Θέμα 2<sup>ο</sup>:**Α. Να κάνετε τις πράξεις:  $2x - 2x(3x^2 - 1) + (2 - x) \cdot (-3x) - (-3x)^2$ 

(5 μον.)

Β. α. Να κάνετε τις πράξεις:  $(x - 3)^2 - (x + 2)(x - 8)$ β. Να υπολογίσετε τον αριθμό:  $9997^2 - 9992 \cdot 10.002$  (2x5=10 μον.)Γ. Αν  $\alpha + \beta = -1$  και  $\alpha\beta = -2$  να υπολογίσετε τις παραστάσεις:α.  $\alpha^2 + \beta^2$ β.  $\alpha^3 + \beta^3$ 

(2x5=10 μον.)

**Θέμα 3<sup>ο</sup>:**Α. Αν ο αριθμός  $\kappa$  είναι ακέραιος, να δείξετε ότι ο αριθμός  $\kappa^2 - \kappa$  είναι άρτιος.

(10μον.)

Β.α. Αν  $A = x^2 + x + 4$  και  $B = (x - 2)^2$ Να αποδείξετε ότι  $B = A - 5x$  και  $AB + 6x^2 = (A - 2x)(A - 3x)$ β. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:  $(x^2 + x + 4)(x - 2)^2 + 6x^2$ 

(2x7,5)=15μον.)

**Θέμα 4<sup>ο</sup>:**

**A.** Να βρείτε το Ε.Κ.Π και το Μ.Κ.Δ των παραστάσεων :

$$3\alpha^2 - 3\alpha, 2\alpha^2 - 4\alpha + 2, \alpha^2 - 3\alpha + 2 \quad (5 \text{ μον.})$$

**B.** Να κάνετε τις πράξεις :

**α.**  $\frac{y}{y-1} \cdot \frac{y^2-36}{y+1} : \frac{y+6}{y+1}$

**β.**  $\left( \frac{\omega-5}{\omega+3} : \frac{3\omega-15}{\omega^2+3\omega} \right) \cdot \frac{\omega-7}{\omega} \quad (2 \times 5 = 10 \text{ μον.})$

**Γ.α.** Να κάνετε τις πράξεις :

$$\left( \frac{x+1}{2x-2} + \frac{6}{2x^2-2} - \frac{x+3}{2x+2} \right) : \frac{3}{4x^2-4}$$

**β.** Να αποδείξετε ότι :  $\frac{\alpha - \frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}}{1 + \frac{\alpha(\alpha-\beta)}{1+\alpha\beta}} = \beta \quad (2 \times 5 = 10 \text{ μον.})$

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### Θέμα 1<sup>ο</sup>:

**A. α.** Αν  $\alpha, \beta \geq 0$ , τότε  $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$ .

**β.** Αν το πολυώνυμο  $P(x)$  έχει βαθμό 0 και το πολυώνυμο  $Q(x)$  έχει βαθμό 3, τότε το πολυώνυμο  $P(x) \cdot Q(x)$  έχει βαθμό 3.

**γ.**  $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ .

**δ.** Ρητή αλγεβρική παράσταση λέγεται μια αλγεβρική παράσταση που είναι το κλάσμα και οι όροι του είναι πολυώνυμο.

**B.α.** Παραγοντοποίηση είναι η διαδικασία με την οποία μια παράσταση, που είναι άθροισμα, μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων.

**β.** Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ) δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μικρότερο από τους εκθέτες του.

### Θέμα 2<sup>ο</sup>:

$$\begin{aligned} \text{A. } 2x - 2x(3x^2 - 1) + (2 - x) \cdot (-3x) - (-3x)^2 &= \\ &= 2x - 6x^3 + 2x - 6x + 3x^2 - 9x^2 = -6x^3 - 6x^2 - 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{B.α. } (x - 3)^2 - (x + 2)(x - 8) &= x^2 - 6x + 9 - (x^2 - 8x + 2x - 16) = \\ &= x^2 - 6x + 9 - x^2 + 8x - 2x + 16 = 25 \end{aligned}$$

**β.** Για  $x=10.000$  από το α. ερώτημα έχουμε :

$$\begin{aligned} (10.000 - 3)^2 - (10.000 + 2) \cdot (10.000 - 8) &= 25 \text{ δηλαδή} \\ 9997^2 - 10.002 \cdot 9992 &= 25 \end{aligned}$$

$$\text{Γ.α. Είναι } (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta.$$

$$\text{Άρα : } \alpha^2 + \beta^2 = (-1)^2 - 2 \cdot (-2) = 1 + 4 = 5$$

$$\text{β. Είναι } (\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$\text{Άρα } \alpha^3 + \beta^3 = (-1)^3 - 3(-2) \cdot (-1) = -1 - 6 = -7$$

### Θέμα 3<sup>ο</sup>:

**A.** Έστω  $\kappa$  ακέραιος .

**1<sup>η</sup> περίπτωση :** Αν  $\kappa$  άρτιος , τότε θα έχει τη μορφή  $2\lambda$  .

$$\text{Άρα } \kappa^2 - \kappa = (2\lambda)^2 - 2\lambda = 4\lambda^2 - 2\lambda = 2(\underbrace{2\lambda^2 - \lambda}_{\mu}) = 2\mu \text{ άρα}$$

$$\kappa^2 - \kappa : \text{άρτιος.}$$

**2<sup>η</sup> περίπτωση :** Αν  $\kappa$  περιττός , τότε θα έχει τη μορφή  $2\lambda+1$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \kappa^2 - \kappa &= (2\lambda+1)^2 - (2\lambda+1) = 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 - 2\lambda - 1 = \\ &= 4\lambda^2 + 2\lambda = 2(\underbrace{2\lambda^2 + \lambda}_{\mu}) = 2\mu \text{ άρα } \kappa^2 - \kappa : \text{άρτιος} \end{aligned}$$

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν ο  $\kappa^2 - \kappa$  είναι άρτιος .

**B. α.**  $A - 5x = x^2 + x + 4 - 5x = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = B$

$$(A - 2x)(A - 3x) = A^2 - 3Ax - 2Ax + 6x^2 =$$

$$A^2 - 5Ax + 6x^2 = A(A - 5Ax) + 6x^2 = AB + 6x^2$$

**β.** Παρατηρούμε ότι  $A = x^2 + x + 4$  και  $B = (x-2)^2$  άρα από το

α ερώτημα έχουμε :  $AB + 6x^2 = (A - 2x)(A - 3x)$  δηλ

$$(x^2 + x + 4)(x-2)^2 + 6x^2 = (x^2 + x + 4 - 2x)(x^2 + x + 4 - 3x) \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + x + 4)(x-2)^2 + 6x^2 = (x^2 - x + 4)(x^2 - 2x + 4)$$

### Θέμα 4<sup>ο</sup>:

**A.**  $3\alpha^2 - 3\alpha = 3\alpha(\alpha - 1) = 3\alpha(\alpha - 1)$

$$2\alpha^2 - 4\alpha + 2 = 2(\alpha^2 - 2\alpha + 1) = 2(\alpha - 1)^2$$

$$\alpha^2 - 3\alpha + 2 = (\alpha - 2)(\alpha - 1)$$

$$\text{άρα E.K.Π} = 6(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)\alpha$$

$$\text{M.K.Δ} = (\alpha - 1)$$

$$\begin{aligned} \text{Β. α. } \frac{y}{y-1} \cdot \frac{y^2-36}{y+1} : \frac{y+6}{y+1} &= \frac{y}{y-1} \cdot \frac{(y-6)(y+6)}{y+1} : \frac{y+6}{y+1} = \\ \frac{y(y-6)(y+6)}{(y-1)(y+1)} \cdot \frac{y+1}{y+6} &= \frac{y(y-6)(y+6)(y+1)}{(y-1)(y+1)(y+6)} = \frac{y(y-6)}{y-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta. \left( \frac{\omega-5}{\omega+3} : \frac{3\omega-15}{\omega^2+3\omega} \right) \cdot \frac{\omega-7}{\omega} &= \left( \frac{\omega-5}{\omega+3} \cdot \frac{\omega^2+3\omega}{3\omega-15} \right) \cdot \frac{\omega-7}{\omega} = \\ &= \left[ \frac{\omega-5}{\omega+3} \cdot \frac{\omega(\omega+3)}{3(\omega-5)} \right] \cdot \frac{\omega-7}{\omega} = \left[ \frac{(\omega-5) \cdot \omega(\omega+3)}{(\omega+3) \cdot 3 \cdot (\omega-5)} \right] \cdot \frac{\omega-7}{\omega} = \\ &= \frac{\omega}{3} \cdot \frac{\omega-7}{\omega} = \frac{\omega(\omega-7)}{3\omega} = \frac{\omega-7}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma. \alpha. \left( \frac{x+1}{2x-2} + \frac{6}{2x^2-2} - \frac{x+3}{2x+2} \right) : \frac{3}{4x^2-4} &= \\ &= \left[ \frac{x+1}{2(x-1)} + \frac{6}{2(x^2-1)} - \frac{x+3}{2(x+1)} \right] : \frac{3}{4(x^2-1)} = \\ &= \left[ \frac{x+1}{2(x-1)} + \frac{6}{2(x-1)(x+1)} - \frac{x+3}{2(x+1)} \right] : \frac{3}{4(x-1)(x+1)} \end{aligned}$$

$$\text{Ε.Κ.Π} = (2(x-1)(x+1))$$

$$\left[ \frac{(x+1)^2}{2(x-1)(x+1)} + \frac{6}{2(x-1)(x+1)} - \frac{(x-1)(x+3)}{2(x+1)(x-1)} \right]$$

$$: \frac{3}{4(x-1)(x+1)} =$$

$$\left[ \frac{(x+1)^2 + 6 - (x-1)(x+3)}{2(x+1)(x-1)} \right] : \frac{3}{4(x-1)(x+1)} =$$

$$\left[ \frac{x^2 + 2x + 1 + 6 - (x^2 + 3x - x - 3)}{2(x+1)(x-1)} \right] : \frac{3}{4(x-1)(x+1)} =$$

$$\left[ \frac{x^2 + 2x + 1 + 6 - x^2 - 3x + x + 3}{2(x-1)(x+1)} \right] : \frac{3}{4(x-1)(x+1)} =$$

$$\frac{10}{2(x-1)(x+1)} \cdot \frac{4(x-1)(x+1)}{3} = \frac{10 \cdot 4(x-1)(x+1)}{2 \cdot 3(x-1)(x+1)} = \frac{20}{3}$$

$$\begin{aligned} \beta. \quad & \frac{\alpha - \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}}{1 + \frac{\alpha(\alpha - \beta)}{1 + \alpha\beta}} = \frac{\frac{\alpha(1 + \alpha\beta)}{1 + \alpha\beta} - \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}}{\frac{1 + \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} + \frac{\alpha(\alpha - \beta)}{1 + \alpha\beta}} = \frac{\frac{\alpha(1 + \alpha\beta) - (\alpha - \beta)}{1 + \alpha\beta}}{\frac{1 + \alpha\beta + \alpha(\alpha - \beta)}{1 + \alpha\beta}} = \\ & = \frac{\frac{\alpha + \alpha^2\beta - \alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}}{\frac{1 + \alpha\beta + \alpha^2 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta}} = \frac{(1 + \alpha\beta)(\alpha^2\beta + \beta)}{(1 + \alpha\beta)(1 + \alpha^2)} = \frac{\beta(\alpha^2 + 1)}{(\alpha^2 + 1)} = \beta \end{aligned}$$