

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**203**

Όν/μο:.....  
 Ύλη:Ολη

Γ΄ Λυκείου  
 2-5-2020

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.**Εστω μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα  $[α,β]$ . Αν  
 • η  $f$  είναι συνεχής στο  $[α, β]$  και  
 •  $f(α) \neq f(β)$   
 τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(α)$  και  $f(β)$  υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (α,β)$  τέτοιος ώστε  $f(x_0) = \eta$ . **(μον.8)**

**A2.**Εστω μια συνάρτηση  $f$  και  $x_0$  ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ ; **(μον.4)**

**A3.**Να διατυπώσετε και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής. **(μον.5)**

**A4.**Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** Σωστό ή **(Λ)** Λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

1. Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει ότι  $|\eta \mu x| > |x|$ . Σ Λ

2. Αν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη σ' αυτό. Σ Λ

3. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη  $x, y$  συνδέονται με τη σχέση  $f(x)=y$ , όταν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του  $y$  στο σημείο  $x_0$  την παράγωγο  $f'(x_0)$ . Σ Λ

4. Αν για τη συνάρτηση  $f$  ισχύει το θεώρημα Rolle στο  $[α, β]$ , τότε η γραφική της παράσταση έχει σε ένα τουλάχιστον σημείο οριζόντια εφαπτομένη. Σ Λ  
**(μον8)**

**ΘΕΜΑ Β**

Ενα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  έχει πλάτος  $A\Delta=2$  και μεταβλητό μήκος. Αν η διαγώνιος του  $A\Gamma$  έχει μήκος  $A\Gamma=x$  τότε:

**B1.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου δίνεται από τη συνάρτηση  $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 4}$ ,  $x > 2$ . (μον.6)

**B2.** Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta, \gamma$  ώστε να ισχύει:  
 $\sqrt{x^2 - 4} \cdot f'(x) + f^2(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ , για κάθε  $x > 2$ . (μον.5)

**B3.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της  $f^{-1}$ . (μον.7)

**B4.** Αν  $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 16}$ ,  $x > 0$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 2f^{-1}(x))$  (μον.7)

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- $f'(x) = \lambda + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$
- η  $f$  παρουσιάζει ακρότατο στο  $(1, 4)$ .

**ΓΑ1.** Να βρείτε τον τύπο της  $f$ . (μον.4)

$$\text{Αν } f(x) = x + \ln x + \frac{2}{x} + 1, \quad x > 0$$

**ΓΑ2.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 > 1$  ώστε  $x_0^2 + x_0 \ln x_0 + 2 = 2019x_0$ . (μον.6)

**ΓΑ3.** Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση  $g(x) = f(e^x)$  παρουσιάζει μοναδικό ακρότατο το οποίο και να βρείτε. (μον.4)

β) η ευθεία που διέρχεται απ' το ακρότατο της  $f$  και το ακρότατο της  $g$  είναι παράλληλη στον  $x'x$ . (μον.5)

**ΓΒ.** Έστω μια συνάρτηση  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$ . Αν η  $f$  έχει σύνολο τιμών το  $[-1, 2]$  και  $f(\alpha)=0$ ,  $f(\beta)=1$ , να δείξετε ότι :

**α)** Υπάρχουν  $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$  τέτοια ώστε  $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ . **(μον.3)**

**β)** Αν η  $f'$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  τότε η εξίσωση

$f'(x) = (x^2 + 1)f(x)$  έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο  $(\alpha, \beta)$ . **(μον.3)**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος

Bolzano στο διάστημα  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ . **(μον.5)**

**Δ2.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία στο διάστημα  $(0, \pi)$ . **(μον.5)**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι  $\eta\mu x < \frac{2x}{\pi}$ ,  $\forall x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  και στη συνέχεια

να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2x}{\pi \cdot \eta\mu x - 2x}$ . **(μον.5)**

**Δ4.** Να δείξετε ότι σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει  $\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma > 2$ . **(μον.5)**

**Δ5.** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$x^2 = x^2 \cdot f(x) + \sigma\upsilon\nu x$ . **(μον.5)**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**