

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

202

Ον/μο:.....

Γ' Λυκείου

Υλη:Ολη

28-3-2020

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση $f(x) = x^v$, $v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = v \cdot x^{v-1}$. (μον.5)

β) Η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$. (μον.5)

A2. Πότε η ευθεία $y = k$ ονομάζεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης στο $+\infty$; (μον.2)

A3. Να διατυπώσετε και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού. (μον.3)

A4. Να χαρακτηρίσετε με (Σ) Σωστό ή (Λ) Λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

1. Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις τότε η σύνθεση της f με τη g είναι βέβαιο ότι ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$

2. Αν για τις συναρτήσεις f, g με κοινό πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ ισχύει $f(x) < g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

3. Για κάθε ακέραιο $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^k) = +\infty$.

4. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ και το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ δεν υπάρχει

τότε είναι βέβαιο ότι το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ δεν υπάρχει.

5. Αν η f είναι συνεχής μη μηδενική συνάρτηση στο Δ και

$f(x) \geq 0, \forall x \in \Delta$ τότε για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$ με $\alpha \neq \beta$, ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$.

(μον10)

ΘΕΜΑ Β

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση της παραγώγου f' της συνάρτησης f η οποία έχει συνεχή παράγωγο στο $[0,3]$.

Ισχύει ακόμα:

$$f(0) = 0, \quad E(\Omega_1) = E(\Omega_2) = \frac{E(\Omega_3)}{2} = 3.$$

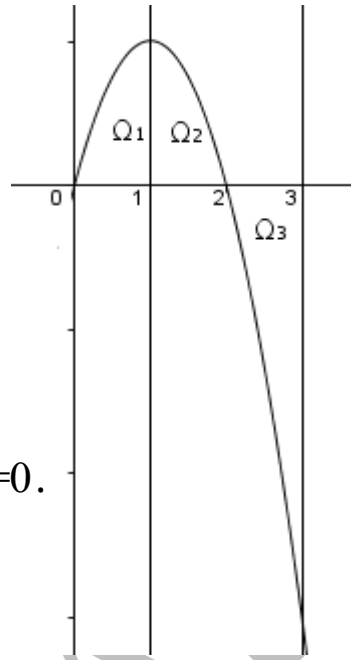
B1. Να δείξετε ότι $f(1) = 3$, $f(2) = 6$ και $f(3) = 0$.

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f και τα ακρότατα.

B2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

B3. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta \mu x}$.

B4. Να δείξετε ότι υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της C_f με $\xi \in (1,2)$ στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων. (μον.7)



(μον.8)

(μον.5)

(μον.5)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μία τουλάχιστον εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$. (μον.9)

Γ2. Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση g για την οποία ισχύει:

$$|g(x) + 3x - 2| \leq |f(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = -3x + 2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g στο $+\infty$. (μον.8)

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{g(x)} + 5^{g(x)}}{4^{g(x)} - 3^{g(x)+1}} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2g(x) - x}{xg(x) + x^2 \left(3 + \eta \mu \frac{1}{x} \right)}. \quad (\text{μον.8})$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ δύο φορές παραγωγίσιμη

με $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ και $(f'(x))^2 + 2f'(x) + \frac{1}{x^2 + 1} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Αν $f(0) = 1$ τότε:

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$. (μον.6)

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (μον.5)

Δ3. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της. (μον.6)

Δ4. Αν $f^{-1}(x) = \frac{1-x^2}{2x}, x \in (0, +\infty)$, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f^{-1}(x) \cdot \ln x$, τον άξονα των $x'x$ και την ευθεία $x=e$. (μον.8)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ