ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

201

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη:Ολη **22-2-2020**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος. **(μον.8)**

Α2. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$. **(μον.5)**

Α3. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; **(μον.4)**

Α4. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α. Δύο συναρτήσεις λέγονται ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και τον ίδιο τύπο

β. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα Δ_1 και Δ_2, τότε είναι γνησίως αύξουσα και στο διάστημα $\Delta_1\cup\Delta_2$.

(2x4=μον.8)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=x^2-|x|-2$,$x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. **(μον.6)**

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς την καμπυλότητα και τα σημεία καμπής. **(μον.4)**

Β3. Να εξετάσετε αν η f έχει ασύμπτωτες. **(μον.4)**

Β4. Να κατασκευάσετε τον πίνακα μεταβολών της f και να χαράξετε ενδεικτικά τη γραφική της παράσταση. **(μον.5)**

Β5. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, και τις ευθείες y=4, y=10. **(μον.6)**

ΘΕΜΑ Γ

ΓΑ.Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f , g με

$f'(x)-g'(x)=1,\ f'(x)\neq 1,\quad \forall x\in\mathbb{R}$. Αν στο όριο

$L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)+2}{f(x)-x-2}$ εφαρμόσουμε τον κανόνα του ορίου του

πηλίκου συναρτήσεων ,προκύπτει μορφή $\dfrac{0}{0}$.

Γ1. Να υπολογίσετε το όριο L . **(μον.4)**

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες στο $+\infty$ των C_f και C_g **(μον.4)**

Γ3. Να αποδείξετε ότι η C_g τέμνει τον x΄x το πολύ σ΄ ένα σημείο . **(μον.4)**

Γ4. Να αποδείξετε ότι $f(x)-g(x)=x+4,\quad \forall x\in\mathbb{R}$ **(μον.4)**

ΓΒ.Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2\ln x+(1-x)\cdot\ln(1-x)$.

Γ5. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της . **(μον.2)**

Γ6. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to0^+}f(x),\quad \lim\limits_{x\to1^-}f(x)$ **(μον.4)**

Γ7. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $f'(\xi)=0$ **(μον.3)**

ΘΕΜΑ Δ

ΔΑ.Οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$

Δ1. Να αποδείξετε ότι , αν $f(x)\le g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$,
τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\le\int_\alpha^\beta g(x)dx$ **(μον.3)**

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστη (m) και μέγιστη (M) τιμή στο $[\alpha,\beta]$ **(μον.2)**

Δ3. Να αποδείξετε ότι $m(\beta-\alpha)\le\int_\alpha^\beta f(x)dx\le M(\beta-\alpha)$ **(μον.3)**

Δ.4. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\dfrac{1}{3+t^2}dt$ **(μον.8)**

ΔΒ. Αν $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu x\,dx=\dfrac{1}{8}$,υπολογίστε τον φυσικό ν. **(μον.3)**

ΔΓ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}\,dx$ **(μον.6)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α :

Α1. Σχ. Βιβλίο

Α2. Σχ. Βιβλίο

Α3. Σχ. Βιβλίο

Α4. α. Λάθος. Οι συναρτήσεις $f(x)=x^2$ και $g(x)=x^4$ με πεδίο ορισμού το $A=\{-1,0,1\}$ είναι ίσες , ενώ δεν έχουν τον ίδιο τύπο.

β. Λάθος. Η $f(x)=-\dfrac{1}{x}$, $x\in\mathbb{R}^*$ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ αλλά όχι στο $\mathbb{R}^*$.

Θέμα Β :

Β1. Είναι $f(x)=\begin{cases} x^2-x-2, & x\geq 0 \\ x^2+x-2, & x<0 \end{cases}$. Η f είναι συνεχής ως πράξη συνεχών. Για την παράγωγο της f έχουμε:

$f'(x)=\begin{cases} 2x-1, & x>0 \\ 2x+1, & x<0 \end{cases}$. Για x=0 είναι:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-x-2+2}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x-1)}{x}=-1 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x-2+2}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(x+1)}{x}=1, \text{ οπότε}$$

η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Επίσης, για x>0 είναι:

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 2x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \dfrac{1}{2}$ και για x<0 είναι:

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 2x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\dfrac{1}{2}$. Επομένως για τη μονοτονία της f έχουμε τον πίνακα:

x	$-\infty$ $-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$ $+\infty$
$f'(x)$	-	0 +	‖	-	0 +
$f(x)$	↘	↗	‖	↘	↗

Η f είναι γν. φθίνουσα στα $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ και $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, ενώ είναι γν. αύξουσα στα $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ και $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=-\frac{1}{2}$ το $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{4}$, τοπικό μέγιστο για x=0 το $f(0)=-2$ και τοπικό ελάχιστο για $x=\frac{1}{2}$ το $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{4}$.

B2. Η f' είναι παραγωγίσιμη με $f''(x)=\begin{cases}2, & x>0\\ 2, & x<0\end{cases}$, οπότε $f''(x)>0$, δηλαδή, η f είναι κυρτή και δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

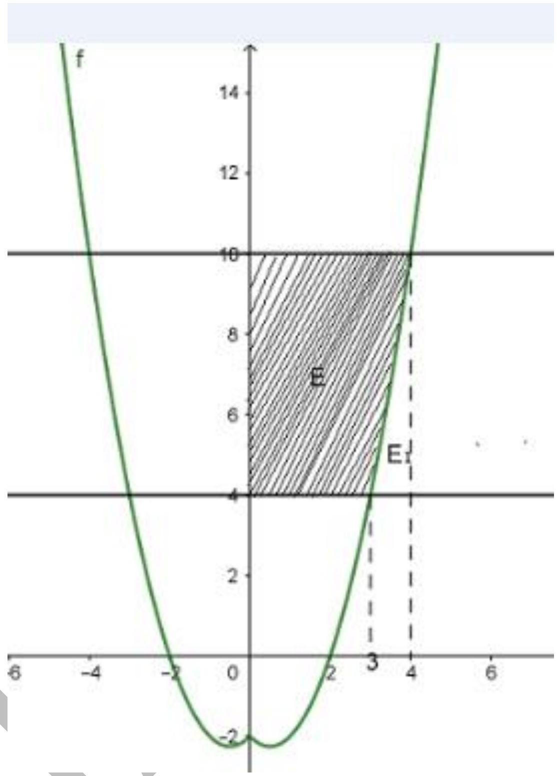
B3. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Επίσης, τόσο για x<0 , όσο και για x>0 είναι πολυωνυμική $2^{ου}$ βαθμού άρα δεν έχει πλάγιες και οριζόντιες ασύμπτωτες.

B4. Έχουμε: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x-2\right)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-x-2\right)=+\infty$. Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		
$f'(x)$		-	0	+	‖	-	0	+	
$f''(x)$		+	|	+	‖	+	|	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	τ.ε. $-\frac{9}{4}$	↗	τ.μ. -2	↘	τ.ε. $-\frac{9}{4}$	↗	$+\infty$

Επίσης, η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,-2)$ ενώ για τον $x'x$ είναι: Για x<0 $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=-2$ ή $x=1$απορ. και για x>0 $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=-1$ απορ.. Άρα τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(-2,0)$ και $(2,0)$.

Οπότε η γραφική παράσταση της f είναι:



B5.Είναι:

$E = 4 \cdot 6 - E_1 = 24 - E_1$ **(1)** και

$E_1 = \int_3^4 [(x^2 - x - 2) - 4]dx =$

$= \int_3^4 (x^2 - 2x - 6)dx = [\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x]_3^4 =$

$= \ldots$

και το ζητούμενο εμβαδό είναι $E_{ολ.} = 2E$ γιατί η f είναι άρτια συνάρτηση.

ΘΕΜΑ Γ

ΓΑ.Γ1.Έχουμε : $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)+2}{f(x)-x+2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{LH}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{g'(x)}{f'(x)-1} \overset{υπ}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{g'(x)}{g'(x)} = 1$

Γ2.• Αφού $\lim_{x \to +\infty} (g(x)+2) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} g(x) = -2$ οπότε η $y = -2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

• Αφού $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x+2)] = 0$, η $y = x + 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Γ3. Έστω ότι η C_g τέμνει τον x΄x σε τουλάχιστον δύο σημεία $M(x_1, 0)$, $N(x_2, 0)$.Τότε είναι $g(x_1) = g(x_2) = 0$ και σύμφωνα με το Θ.Rolle θα υπάρχουν τουλάχιστον ένας $\xi \in (x_1, x_2) : g'(\xi) = 0 \overset{υπ}{\Rightarrow} f'(\xi) = 1$, άτοπο αφού $f'(x) \neq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Άρα η C_g τέμνει τον x΄x το πολύ σ΄ ένα σημείο .

Γ4. Έχουμε ότι : $f'(x)-g'(x)=1 \Leftrightarrow \left(f(x)-g(x)\right)'=(x)' \Leftrightarrow$

$f(x)-g(x)=x+c$ **(1)** $\Leftrightarrow f(x)-x=g(x)+c$ άρα

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)+c\right]\Rightarrow 2=-2+c \Leftrightarrow c=4$

Η (1) γίνεται : $f(x)-g(x)=x+4$, $x\in\mathbb{R}$.

ΓΒ. Γ5. Πρέπει $\left.\begin{array}{l} x>0 \\ 1-x>0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{array}{l} x>0 \\ x<1 \end{array}$ οπότε $A_f=(0,1)$ **.**

Γ6.• Είναι : $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^2\ln x\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^2}}\right)\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{LH}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{2}{x^3}}=$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\left[(1-x)\cdot\ln(1-x)\right]=1\cdot\ln1=0$

οπότε $\lim\limits_{x\to0^+}\left[x^2\ln x+(1-x)\cdot\ln(1-x)\right]=0$.

•Είναι $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)\cdot\ln(1-x)\overset{1-x=y}{=}\lim\limits_{y\to0^+}\left(y\cdot\ln y\right)=\lim\limits_{y\to0^+}\dfrac{\ln y}{\dfrac{1}{y}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{LH}{=}}$

$\lim\limits_{y\to0^+}\dfrac{\dfrac{1}{y}}{-\dfrac{1}{y^2}}=\lim\limits_{y\to0^+}(-y)=0$ και $\lim\limits_{x\to1^-}\left(x^2\ln^2 x\right)=1\cdot\ln1=0$

οπότε $\lim\limits_{x\to1^-}\left[x^2\ln x+(1-x)\ln(1-x)\right]=0$.

Γ7. Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ f(x), & 0<x<1\\ 0, & x=1\end{cases}$ η οποία

είναι συνεχής στο (0,1) ως πράξεις συνεχών ,

$\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0=g(0)$, $\lim\limits_{x\to1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=0=g(1)$

οπότε η g είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Επίσης η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ -αφού είναι η f- και $g(0)=g(1)$.Σύμφωνα με το Θ.Rolle , υπάρχει τουλάχιστον ένας $\xi\in(0,1): g'(\xi)=0$ δηλ . $f'(\xi)=0$, αφού στο (0,1) είναι $f(x)=g(x)$.

ΘΕΜΑ Δ

ΔΑ.

Δ1. Αφού $f(x)\le g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)\le0$ άρα $\int_\alpha^\beta\big(f(x)-g(x)\big)dx\le0\Leftrightarrow$

$\int_\alpha^\beta f(x)dx-\int_\alpha^\beta g(x)dx\le0\Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx\le\int_\alpha^\beta g(x)dx$

Δ2. Αφού η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, σύμφωνα με το Θεώρημα Μ.Ε.Τ έχει ελάχιστη (m) και μέγιστη (M) τιμή δηλ. υπάρχουν x_ε και x_μ στο $[\alpha,\beta]$ ώστε $f(x_\varepsilon)=m$ και $f(x_\mu)=M$.

Δ3. Έχουμε : $m\le f(x)\le M\Rightarrow\int_\alpha^\beta m dx\le\int_\alpha^\beta f(x)dx\le\int_\alpha^\beta M dx\Rightarrow$

$m(\beta-\alpha)\le\int_\alpha^\beta f(x)dx\le M(\beta-\alpha)$

Δ4. Η $f(t)=\dfrac{1}{3+t^2}$ έχει $A_f=R$ και

$f'(t)=-\dfrac{(3+t^2)'}{(3+t^2)^2}=-\dfrac{2t}{(3+t^2)^2}<0\quad\forall t>0$ οπότε είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Έχουμε: $x\le t\le x+1\overset{f\downarrow}{\Rightarrow}$

$f(x)\ge f(t)\ge f(x+1)\Rightarrow\int_x^{x+1}f(x)dt\ge\int_x^{x+1}f(t)dt\ \ge\int_x^{x+1}f(x+1)dt\Rightarrow$

$$f(x+1)(x+1-1) \le \int_x^{x+1} f(t)dt \le f(x)\cdot(x+1-x) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3+\left(x+1\right)^2} \le \int_x^{x+1} \frac{1}{3+t^2}dt \le \frac{1}{3+x^2} \ .$$

Όμως : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{3+(x+1)^2} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{3+x^2} = 0$ και από το

κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} \frac{1}{3+t^2}dt = 0$.

ΔΒ. Έχουμε : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{\nu} x \cdot \sigma\upsilon\nu x dx = \frac{1}{8}$ άρα $\left[\frac{\eta\mu^{\nu+1}x}{\nu+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}$ δηλ .

$$\frac{\eta\mu^{\nu+1}\frac{\pi}{2}}{\nu+1} - \frac{\eta\mu^{\nu+1}0}{\nu+1} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{\nu+1} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \nu+1=8 \Leftrightarrow \nu=7$$

ΔΓ. Είναι: $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}dx =$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x - 2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}dx =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2}\cdot dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left|\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x\right| dx \quad \textbf{(1)}$$

Στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$, όπως εύκολα διαπιστώνουμε από τον

τριγωνομετρικό κύκλο , είναι $\sigma\upsilon\nu x \ge \eta\mu x$ άρα $\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x \le 0$

και η (1) γράφεται :

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)dx = \left[\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \left(\eta\mu\frac{\pi}{4} + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\right) - \left(\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \ \text{ δηλ } \ I = \sqrt{2}$$