

<<Μια άποψη για το πρώτο μάθημα στους Μιγαδικούς>>

Από τον  
Χρ.Κυτίπη  
Μαθηματικό

**Σ' ένα τμήμα της Γ' Λυκείου:**

...Πιστεύω ότι ο άνθρωπος, από γεννησιμιού του, είναι εν δυνάμει "Μαθηματικός". Κουβαλάει μαζί του τη μαθηματική λογική, πολύ απλά γιατί τα μαθηματικά είναι απλή λογική. Για παράδειγμα, σε μια φυλή Ιθαγενών στη Λατινική Αμερική, βρέθηκε ότι οι άνθρωποι αυτό που εμείς σήμερα λέμε **ένα** αυτοί το έλεγαν **πέτσεβαλ**.

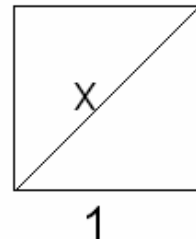
- Μεταφερθείτε λοιπόν, κάνοντας ένα ταξίδι στο παρελθόν, σ' αυτούς και προσπαθήστε να τους πείτε το **δύο**...
- Ναι, το βρήκατε!!! Το έλεγαν **πέτσεβαλ-πέτσεβαλ**.
- Το **τρία**;...Ακριβώς όπως το σκέφτεστε:**πέτσεβαλ-πέτσεβαλ-πέτσεβαλ**.
- Το **τέσσερα**;...Και βέβαια **πέτσεβαλ- πέτσεβαλ- πέτσεβαλ- πέτσεβαλ**.
- Και το 100 κύριε;
- Έχετε δίκιο να απορείτε. Πολύ απλά δεν μπορούσαν να μετρήσουν παραπάνω. Και μη σας φαίνεται περίεργο. Εσείς όταν είσαστε μικρά (4, 5 ετών) μπορούσατε να μετράτε όπως σήμερα; Οι άνθρωποι γνώριζαν μήπως πάντα όσα γνωρίζουν σήμερα; Όχι βέβαια. Εδώ ο Γαλιλαίος περί το 1610 , έλεγε ότι η γη κινείται και κόντεψε να τον κάψουν. Σκεφτείτε ότι ο άνθρωπος ζούσε επί χλιετηρίδες μέσα στην άγνοια γι' αυτό το θέμα. Πίστευε μέχρι πολύ πρόσφατα λοιπόν (τι είναι το 1610στον ιστορικό χρόνο...) ότι ο ήλιος κινείται γύρω από τη Γη. "Κι όμως η Γη κινείται" έλεγε ο Γαλιλαίος και αποδείχτηκε ότι έχει δίκιο, αλλά που να το βρει τότε...Ο άνθρωπος λοιπόν, ανάλογα με την ιστορική περίοδο στην οποία ζούσε ήξερε και στη συνέχεια, επινοούσε, μάθαινε, κι άλλα πράγματα. Ας έρθουμε π.χ. στην Α' Γυμνασίου. Μάθαμε τους αριθμούς, τους Φυσικούς. Τους συμβολίσαμε με N (Νάτσιουραλ) δεν είναι τυχαία η επιλογή του συμβόλου και της λέξης. Η λέξη εκφράζει το περιεχόμενο και το σύμβολο παραπέμπει στο αρχικό γράμμα της λέξης Natural. Μάθαμε να τους προσθέτουμε-αφαιρούμε- πολλαπλασιάζουμε- διαιρούμε. ...

Κι εκεί που ικανοποιημένοι, θεωρήσαμε ότι τελειώσαμε, έρχεται ο καθηγητής και μας λέει (Μην ξεχνάτε, είστε στην Α' Γυμν.)

- Παιδιά θα ασχοληθούμε τώρα μ' ένα άλλο σύνολο αριθμών.
- Ωχ! Ακόμη δεν ξεμπλέξαμε με τους προηγούμενους και πάμε γι' άλλους. Τι τους θέλουμε; σκέφτονται ίσως πολλοί από τους μαθητές...
- Πες μας Ειρήνη:3+5 πόσο κάνει;
- **Ειρήνη**:8.
- **Κώστα** πόσο κάνει 9-4;
- Πέντε κύριε.
- Πόσο κάνει 8-13 Γεωργία;
- Ε! κύριε γίνεται αυτό; Βγαίνει το 13 από το 8; Δεν γίνεται.
- Μπράβο σας παιδιά!!!

- Ας σκεφτούμε το εξής τώρα: Η θερμοκρασία έξω είναι  $3^{\circ}\text{C}$  και πέφτει κατά  $5^{\circ}\text{C}$ . Τι θα δείξει το θερμόμετρο;
  - Γιώργος:  $-2$  βαθμούς.
  - Τι είναι αυτό ρε Γιώργο. Τι  $-2$ . Πού το βρήκες αυτό. Δεν είπαμε ότι ξέρουμε μόνο τους φυσικούς; Ξέχασες ότι δεν είσαι Γ' Λυκείου;
  - Το θερμόμετρο θα δείξει, κύριε, δύο βαθμούς κάτω από το μηδέν.
  - Έτσι μπράβο. Λέω λοιπόν να **επινοήσουμε** κάτι ώστε να αντικαταστήσουμε με μαθηματική γλώσσα, αυτή την πρόταση που μας είπε ο Γιώργος. Για παράδειγμα σας προτείνω, αν και εσείς συμφωνείτε, να συμβολίσουμε τη θερμοκρασία των δύο βαθμών κάτω απ' το μηδέν με το  $-2$ . Τι λέτε;  
...Συμφωνήσαμε λοιπόν, και δημιουργήσαμε έτσι το σύνολο των ακεραίων,  $\mathbb{Z}$ , μάθαμε να δουλεύουμε σ' αυτό, πράξεις, ιδιότητες...κι εκεί που είπαμε ότι τελειώσαμε έρχεται ο "σαδιστής" μαθηματικός και μας λέει:  
<<Παιδιά σήμερα θα ασχοληθούμε μ' ένα καινούριο σύνολο, το σύνολο των Ρητών ( $\mathbb{Q}$ ).
  - Άντε πάλι απ' την αρχή θα σκέφτονται, ίσως οι μαθητές. Είναι γραφτό μας να μας ταλαιπωρούν...
  - Ας σκεφτούμε λοιπόν παιδιά το εξής: (Μην ξεχνάτε ότι ξέρετε τους φυσικούς και ακέραιους μόνο). Έχετε μια τούρτα με 6 κομμάτια και δίνουμε στον Γιώργο το 1 κομμάτι.  
Μας έμειναν τα άλλα 5.  
Ποιον αριθμό θα διαλέγατε να γράψετε μαθηματικά τις παραπάνω έννοιες, δηλ.:
- 
- Το ένα από τα πέντε κομμάτια
  - Τα πέντε από τα έξι κομμάτια
- ... Επειδή λοιπόν δεν επαρκούσαν οι μέχρι τώρα γνωστοί αριθμοί, επινοήσαμε λοιπόν τη γραμμή (-), πάνω της βάλαμε το 1 ή το 5 (το μέρος) και κάτω της το 6 (το όλο). Κατασκευάσαμε τους αριθμούς  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{5}{6}$  για να δηλώσουμε το μέρος απ' το όλο. Τους ονομάσαμε ρητούς ( $\mathbb{Q}$ ) αριθμούς και "παιδευτήκαμε" και μ' αυτούς. Να τους προσθέτουμε, αφαιρούμε, πολλαπλασιάζουμε, διαιρούμε σύνθετα κλάσματα, απλά... Άστα να πάνε.  
...Κάπου στη Β' Γυμνασίου λοιπόν φορτωμένοι με τους φυσικούς ( $\mathbb{N}$ ), ακέραιους ( $\mathbb{Z}$ ), ρητούς ( $\mathbb{Q}$ ), αλλά κι ένα σωρό άλλα π.χ.  $\Theta$ . Θαλή, Πυθαγόρειο θεώρημα, ίσα τρίγωνα... Να σου ο "κακός" μαθηματικός:
- Παιδιά σήμερα θα μιλήσουμε για ένα νέο σύνολο αριθμών τους **άρρητους** ( $\mathbb{Q}'$ ). (Μην ξεχνάτε ότι μπορεί τώρα να είστε στη Γ' Λυκείου αλλά πρέπει να ταξιδέψετε πίσω στη Β' Γυμνασίου όπου ξέρετε τους  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ...).
- Θέλω να λύσουμε το εξής πρόβλημα: Ενός τετραγώνου  $x$ , πλευράς 1 να βρούμε τη διαγώνιο. Τι λέτε;
- **Γιάννης:** Θα εφαρμόσουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα κύριε.

- Πολύ ωραία. Είναι λοιπόν  $x^2=1^2+1^2$   
 $x^2=2$   
 $x=$ ;



- **Γιάννης:**  $x= \sqrt{2}$  κύριε.
- Ξέχασες ότι είσαι στη Β' Γυμνασίου Γιάννη. Τι είναι αυτό το ρίζα δύο που μου λες; Μου είναι άγνωστο. Εγώ ξέρω ρίζες στα δέντρα, στα μαλλιά, στα δόντια. Ξέρω π.χ. τη φράση " οι ρίζες μας " (το γενεαλογικό μας δέντρο, από πού προερχόμαστε), αλλά αυτό δεν το γνωρίζω... Τι έχουμε λοιπόν μπροστά μας. Ψάχνουμε έναν αριθμό που όταν τον υψώσουμε στο τετράγωνο θα μας δώσει 2. Μήπως είναι το 1; Όχι γιατί  $1^2=1$ . Άρα είναι παραπάνω. Μήπως 2; Όχι γιατί  $2^2=4$ . Άρα λιγότερο. Μήπως 1,5; Όχι γιατί  $1,5^2=2,25$ . Άρα λιγότερο. Μήπως 1,4; Αλλά  $1,4^2=1,96$ . Περισσότερο λοιπόν. Μήπως 1,41; Αλλά  $1,41^2=1,9881$ . Μήπως 1,42; Αλλά  $1,42^2=2,0164$ . Είναι λοιπόν ένας αριθμός μεταξύ του 1,41 και 1,42. Κουράστηκα μ' αυτές τις πράξεις, όμως παιδιά. Ας πάρω το κομπιουτεράκι...

Πατάω  $2\sqrt{\phantom{x}}=1,414213562$ . Μου το δίνει λοιπόν με προσέγγιση 9 δεκαδικών ψηφίων. Υπάρχουν άπειρα ακόμα. Επομένως είναι αδύνατο να υπολογίσουμε τον αριθμό που ψάχνουμε. Μα στο διάλογο σκέφτεσαι!!...Είναι δυνατόν να μην μπορώ να βρω αυτόν τον αριθμό; Κι όμως δεν μπορούμε...

Σβήνω στη συνέχεια τον αριθμό 1,414213562 απ' τον πίνακα και ζητάω απ' τους μαθητές να μου τον πούνε, όποιος τον θυμάται. Αν κάποιος απαντήσει θα πω πως είναι πολύ φωτογραφικός τύπος. Τέρας μνήμης.

- Βλέπετε λοιπόν παιδιά ότι δεν τον θυμάστε; Ούτε και εγώ. Λέω λοιπόν: να επινοήσουμε ένα σύμβολο που να συμβολίζει τον ζητούμενο αριθμό. Κάποιος μαθητής μου είπε μια χρονιά: "Να τον συμβολίσουμε  $2^{\square}$  κύριε."

Ενθουσιάστηκα με την απάντησή του και προσπαθούσα να σκεφτώ ότι θα μπορούσε να συμβολιστεί και έτσι γιατί επινοήσαμε το  $\sqrt{2}$ . Σκέφτηκα π.χ. τι θα έκανα με τον  $2^3$ , θα ζωγράφιζα έναν κύβο στον εκθέτη; Αν είχα  $2 \cdot 2$  τι θα έλεγα...;

Επινοήσαμε λοιπόν το  $\sqrt{2}$  και διαβάζουμε τετραγωνική ρίζα του 2. Γιατί άραγε διαλέξαμε τη λέξη **ρίζα**; Σκέφτομαι ότι έχει σχέση με τις "ρίζες μας" με το από πού ερχόμαστε. Γιατί το  $\sqrt{2}$  είναι ο αριθμός απ' τον οποίο με ύψωση στο τετράγωνο ( $\sqrt{2}^2$ ) γεννιέται το 2 δηλ, το  $\sqrt{2}$  είναι ο "πρόγονος" του 2. Ίσως!!...

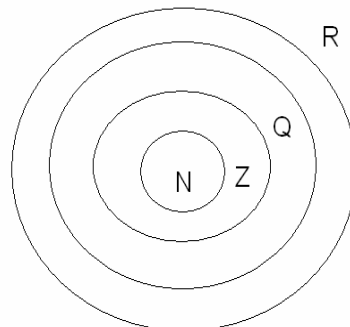
- Επινοήσαμε λοιπόν έτσι παιδιά, και τους **άρρητους** αριθμούς (τους συμβολίσαμε με  $Q'$  ή  $Q_a$ ), μάθαμε να δουλεύουμε μ' αυτούς μαθηματικά, έχουν τις ιδιότητες τους, μια καλή μαθηματική δομή. Μάθαμε π.χ. να λύνουμε πλέον την εξίσωση  $x^2=2$ . Ερχόμαστε λοιπόν τώρα στη Γ' Λυκείου.

- Γωγώ σύνελθε είσαι Γ' Λυκείου τώρα. Έμεινες στο Γυμνάσιο.

Μ' αυτά και μ' αυτά λοιπόν φτάσαμε ίσαμε τώρα φορτωμένοι με όλα τα τσουβάλια των αριθμών (N, Z, Q, Q'), τα βάλουμε όλα σ' ένα μεγαλύτερο τσουβάλι, και το βαφτίσαμε σύνολο  $\mathbb{R}$  των πραγματικών αριθμών. Ας προσπαθήσουμε λοιπόν τώρα να λύσουμε την εξίσωση  $x^2 = -1$ .

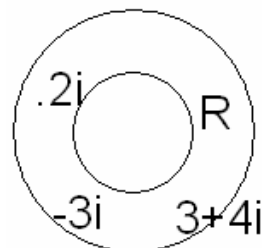
**Θωμάς:** Είναι αδύνατη κύριε.

- Πολύ ωραία. Αλλά με τα μέχρι τώρα γνωστά. Δεν μπορούμε να πούμε, π.χ. να επινοήσουμε έναν αριθμό ώστε το τετράγωνό του να είναι -1;
- **Σωτήρης:** Γιατί κύριε; Ότι θέλουμε κάνουμε; φανταζόμαστε έναν αριθμό, ότι μας έρθει στο μυαλό και...
- Γιατί Σωτήρη, τους άλλους αριθμούς το 2, το -9, το  $\frac{5}{6}$ , το  $\sqrt{2}$  εμείς δεν



τους επινοήσαμε, δεν τους "φανταστήκαμε". Ας φανταστούμε ακόμη έναν. Χάλασε ο κόσμος;

- **Σωτήρης:** Ποιον δηλαδή!;
- Ας πούμε τον φ (αφού τον φανταζόμαστε). Θα πούμε δηλ. ο αριθμός που ψάχνουμε είναι ο φ και έχει την ιδιότητα  $\phi^2 = -1$ . Δεν είναι καλό;
- **Θωμάς:** Ας είναι!
- Θα μπορούσαμε να τον πούμε i από το αγγλικό imagine. E;
- **Σωτήρης:** Ναι!
- E, λοιπόν συμφωνήσαμε αυτόν τον φανταστικό αριθμό (θαρρείς και οι άλλοι δεν ήταν φανταστικοί) να τον συμβολίζουμε με το γράμμα i. Αισθάνομαι πολύ ωραία παιδιά, δεν ξέρω εσείς, που "γεννήσαμε" έναν καινούριο αριθμό. Για να δούμε όμως μπορούμε να δουλέψουμε μ' αυτόν μαθηματικά; Για παράδειγμα τι λέτε για το  $2i + 3i$ ;
- **Κώστας:**  $5i$ .
- Πολύ ωραία. Για τον  $2i \cdot 3i$ ;
- **Λήδα:**  $6i^2 = 6 \cdot (-1) = -6$ .
- Μπράβο! Φαίνεται το πράγμα περπατάει λοιπόν. Ας πάρουμε τώρα ένα μεγαλύτερο τσουβάλι που να χωράει όλους τους προηγούμενους αριθμούς και να έχει και αρκετό κενό χώρο. Σ' αυτόν τον κενό χώρο λέω να ρίξουμε τον  $2i$ ,  $-3i$ ,  $5i$ ,  $-13i$ , κ.λ.π. Να τους πούμε **φανταστικούς** και να τους **συμβολίσουμε I**. Κατανοητό γιατί, ε;
- Ας πάρουμε τώρα έναν πραγματικό, τον 3 και έναν φανταστικό τον  $4i$ . Πόσο κάνει  $3 + 4i$ ... (Εδώ υπάρχει αμηχανία απ' τα παιδιά. Λογικό.)
- Πόσο κάνει  $3 + \sqrt{2}$ , παιδιά;



- **Νίκος:**  $3 + \sqrt{2}$ .
- Μπράβο! Ε!  $3+4i$  κάνει  $3+4i$  λοιπόν. Δηλαδή εδώ έχουμε άλλα “γεννητούρια”. Ανακατεύονται ένας πραγματικός και ένας φανταστικός και δίνουν έναν καινούριο αριθμό τον  $3+4i$ . Να του δώσουμε κι αυτού λοιπόν ένα όνομα. Όλοι έχουμε ένα όνομα σ’ αυτή την κοινωνία, έτσι δεν είναι; Πώς λοιπόν να τον πούμε; Υπάρχει κανείς πρόθυμος για να γίνει νουνός; Δεν θα έχει έξοδα. Το μωρό δεν θέλει τίποτα, ένα όνομα μόνο. Ελάτε...(Υπάρχει μια δυσκολία, εδώ, στη βάπτιση.) Για πείτε μου. (αλλάζω θέμα). Ξέρετε τι σημαίνει η λέξη μιγάς, μιγάδας;
- **Δανάη:** Είναι κάτι με τα παιδιά των ξένων... δεν ξέρω αφήστε το.
- Ας δούμε τι μας λέει λοιπόν στο λεξικό του ο Μπαμπινιώτης (πάω στο γραφείο, δίπλα, παίρνω το λεξικό) διαβάζω:  
**μιγάς:**(ο | η) {μιγάδ-ος, -α|-ες} το πρόσωπο που έχει γεννηθεί από γονείς διαφορετικής φυλής και ιδιαίτερα με διαφορετικό χρώμα δέρματος.  
 [ΕΤΥΜ.<αρχ. μιγάς, -άδος<ρ. μ(ε)ίγνυμι, βλ. κ. μικτός] Νομίζω καταλάβατε....Παιδιά παραπάνω έχει τη λέξη **μιγαδικός** διαβάζω:  
**μιγαδικός:**
  1. αυτός που σχετίζεται με μιγάδες.
  2. μαθηματικά: **μιγαδικός αριθμός** ο αριθμός που αποτελείται από πραγματικό και από φανταστικό αριθμό δηλ. της μορφής  $a+βi$  όπου  $a, β$  πραγματικοί αριθμοί και  $i$  η φανταστική μονάδα....

Μ’ αυτούς λοιπόν τους αριθμούς θα ασχοληθούμε στο εξής, στο κεφάλαιο “**Μιγαδικοί αριθμοί**” παιδιά.

Ευχαριστώ για τη συνεργασία σας.