ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

187

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη:Ολη **15-4-2020**

ΘΕΜΑ Α

Α1.Εστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_o)\cup(x_o,\beta)$, τότε το $f(x_o)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο (α,β). **(μον.10)**

Α2.Να διατυπώσετε και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το θεώρημα Του Fermat. **(μον.5)**

Α4.Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις:

1.Αν $\lim\limits_{x\to x_o}|f(x)|=\ell>0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_o}f(x)=\ell$ ή $\lim\limits_{x\to x_o}f(x)=-\ell$. Σ Λ

2.Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη στο R και 1-1, τότε οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} είναι λύσεις της εξίσωσης $f(f(x))=x$. Σ Λ

3.Κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ έχει μία μέγιστη και μία ελάχιστη τιμή. Σ Λ

4.Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$, τότε η γραφική παράσταση της f έχει πάντα οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Σ Λ

5.Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο [α, β] ισχύει ότι:

$$\int_\alpha^\beta |f(x)|dx=\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right|.$$

(μον10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\sqrt{1-x}$.

Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση. **(μον.6)**

Β2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης. **(μον.7)**

Β3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}(x^2 f^{-1}(x))$. **(μον.5)**

Β4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f ,τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\frac{1}{e}$, $x=1$. **(μον.7)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο A με σύνολο τιμών το $f(A)=[0,+\infty)$ για την οποία ισχύει: $e^{f(x)}+f(x)=x,\ \forall x\in A$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση. **(μον.6)**

Γ2. Να αποδείξετε ότι $A=[1,+\infty)$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f\circ f$ και έπειτα ότι η $f\circ f$ είναι γνησίως αύξουσα. **(μον.6)**

Γ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_1^{e+1} e^{f(x)}\cdot f(x)dx$. **(μον.7)**

Γ4. Να δείξετε ότι $\forall x>1$ ισχύει $(x^2+1)\cdot f(x^2)>x^2\cdot f(1)+f(x^4)$. **(μον.6)**

ΘΕΜΑ Δ

Εστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, για την οποία ισχύουν:

- $f''(x)=\frac{1}{x^2}+1-\frac{1}{x}-f'(x),\ \forall x>0.$
- $f(1)=\frac{e+1}{e}$
- $e\cdot(1-f(x))\le x-2,\ \forall x>0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f'(1)=-\frac{1}{e}$. **(μον.4)**

Δ2. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=-\ln x+x+e^{-x}, x>0$. **(μον.6)**

Δ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο $x_o\in(0,2)$ για το οποίο ισχύει $f(x_o)>1$. **(μον.5)**

Δ4. Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει μοναδικό $x_1<x_o$ ώστε $f(x_1)=f(2)$. **(μον.5)**

β) υπάρχει τουλάχιστον ένας $\xi\in(x_1,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)-f(2)=f'(\xi)$. **(μον.5)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ