ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

184

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη:Συναρτήσεις-Παράγωγοι **14-12-2019**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά. **(μον.5)**

Α2. Έστω μία συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι , αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ. **(μον.8)**

Α3. Πότε το σημείο $A(x_o, f(x_o))$ μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f, ονομάζεται σημείο καμπής της f; **(μον.4)**

Α4.Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

1. Αν μία συνάρτηση f είναι 1-1, τότε είναι γνησίως μονότονη.

2. Αν μία συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή σ' ένα διάστημα Δ, τότε $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$.

(2x4=8μον.)

ΘΕΜΑ Β

Β1.Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο $[0,10]$. Αν $f(0)=1$, $f(10)=21$ και $f'(0)=1$ να αποδείξετε ότι:

1. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,10]$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της. **(μον.4)**

2.Η ευθεία $x-y+1=0$ είναι εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f και $f(x)\geq x+1$ για κάθε $x\in[0,10]$. **(μον.5)**

3.Υπάρχει $\xi\in(0,10)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)>\frac{1}{10}$. **(μον.6)**

4.Η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $\varepsilon: y=-3x+2$ ακριβώς σε ένα σημείο στο διάστημα$(0,10)$. **(μον.5)**

www.efklidis.edu.gr *Τρίκαλα τηλ.-fax(24310-36733)*

Β2. Δύο σημεία Α, Β κινούνται στους ημιάξονες Οx, Oy αντίστοιχα ξεκινώντας ταυτόχρονα από το σημείο Ο με ταχύτητες υ_A=20 m/sec, υ_B=15 m/sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της μεταξύ τους απόστασης 6sec αργότερα. **(μον.5)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

● $f(0)>1$ ● $\left|f^2(x)-2e^x f(x)+e^{2x}-x^2\right|=1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x+\sqrt{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$. **(μον.6)**

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο μόνο σε ένα σημείο $x_o\in(-1,0)$. **(μον.6)**

Γ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f. **(μον.5)**

Γ4. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0,f(0))$. **(μον.4)**

Γ5. Να λύσετε την εξίσωση $f(1-f'(x))+f'(x)=3$. **(μον.4)**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Εστω παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R με τύπο $f(x)=\left|3^x+(\alpha+1)x-1\right|$.Να βρείτε τον α. **(μον.5)**

Δ2. Έστω f συνάρτηση για την οποία ισχύει $f'(x)>5x^4$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Να δείξετε:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. **(μον.5)**

β) Η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς μια ρίζα στο R. **(μον.2)**

Δ3. Έστω η συνάρτηση $g(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$. Να προσδιορίσετε τους α, β, γ, δ $\in\mathbb{R}$ ώστε η C_g να τέμνει τον y΄y στο σημείο Α(0,3) και η g να παρουσιάζει στο x_0=1 μοναδικό ακρότατο το 4, του οποίου να βρείτε το είδος. **(μον.6)**

Δ4. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=(e^x-e)^2\cdot(x-2)^2$ έχει δύο θέσεις ολικού ελάχιστου και μία τουλάχιστον τοπικού μέγιστου η οποία βρίσκεται στο (1,2). **(μον.7)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχ. Βιβλίο **Α2.** Σχ. Βιβλίο **Α3.** Σχ. Βιβλίο

Α4. 1. Λάθος. Η $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$ είναι 1-1 και δεν είναι γνησίως μονότονη.

2. Λάθος. Η $f(x)=x^4$ είναι κυρτή, αλλά έχει $f''(x)=12x^2\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Β

Β1. 1. Εφόσον η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,10]$.

Οπότε έχουμε:

$$0<x<10\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(0)<f'(x)<f'(10)\Leftrightarrow f'(x)>1$$

Δηλαδή, $f'(x)>0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,10]$.

Το σύνολο τιμών της είναι $f([0,10])=[f(0),f(10)]=[1,21]$.

2. Η εφαπτομένη της C_f στο $(0,f(0))$ είναι η:

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y-1=x\Rightarrow x-y+1=0 \ .$$

Εφόσον η f είναι κυρτή, η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο της θα είναι κάτω από τη C_f. Επομένως είναι:

$f(x)\ge x+1$ για κάθε $x\in[0,10]$.

3. Η f είναι συνεχής στο $[0,10]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,10)$, οπότε από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(0,10)$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $f'(\xi_1)=\dfrac{f(10)-f(0)}{10}=\dfrac{21-1}{10}=2$.

Η f' είναι συνεχής στο $[0,\xi_1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\xi_1)$, οπότε από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,\xi_1)\subseteq(0,10)$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$f''(\xi)=\frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{\xi_1}=\frac{2-1}{\xi_1}=\frac{1}{\xi_1} \ .$$

Όμως, $0<\xi_1<10\Rightarrow \dfrac{1}{\xi_1}>\dfrac{1}{10}\Rightarrow f''(\xi)>\dfrac{1}{10}$.

4. Τα σημεία τομής της $\varepsilon: y=-3x+2$ με την f είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=-3x+2 \Leftrightarrow f(x)+3x-2=0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)+3x-2$.

* Η h είναι συνεχής στο $[0,10]$ ως άθροισμα συνεχών.
* $h(0)=f(0)-2=-1<0$

  $h(10)=f(10)+30-2=49>0$

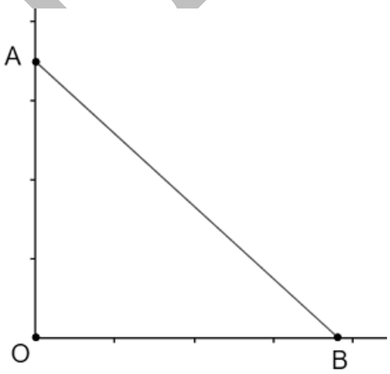
Επομένως από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,10)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0$. Η h είναι γνησίως αύξουσα ως άθροισμα αυξουσών συναρτήσεων, οπότε το x_0 είναι μοναδικό.

B2. Είναι $y'(t)=20 \Leftrightarrow y(t)=20t+c \overset{(0,0)}{\Leftrightarrow} c=0$

δηλαδή, $y(t)=20t$.

Όμοια $x'(t)=15 \Leftrightarrow y(t)=15t+c_1 \overset{(0,0)}{\Leftrightarrow} c_1=0$

δηλαδή , $x(t)=15t$.



Η απόσταση των σημείων Α και Β από Π.Θ. στο ΟΑΒ είναι:

$d(t)=\sqrt{(20t)^2+(15t)^2}=\sqrt{400t^2+225t^2}=\sqrt{625t^2}=25t, t>0$

Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης είναι: $d'(t)=(25t)'=25m/sec$.

Οπότε $d'(6)=25m/sec$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.Η ισότητα $\left|f^2(x)-2e^x f(x)+e^{2x}-x^2\right|=1, \quad \forall x \in R$ γράφεται

$\left|\underbrace{(f(x)-e^x)^2-x^2}_{g}\right|=1$.Επειδή η g δεν μηδενίζεται στο R και είναι συνεχής διατηρεί πρόσημο οπότε θα είναι:

$g(x)=1$ ή $g(x)=-1$ δηλ. $(f(x)-e^x)^2-x^2=1$ ή $(f(x)-e^x)^2-x^2=-1$

και ισοδύναμα $(f(x)-e^x)^2=x^2+1$ ή $(f(x)-e^x)^2=x^2-1$.

Επειδή f(0)>1 είναι $f(x)-e^x=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=e^x+\sqrt{x^2+1}$.

Γ2.Είναι $f'(x)=e^x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ και $f'(0)=1>0,\ f'(-1)=\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<0$ και η f' συνεχής στο $[-1,0]$.Σύμφωνα με το Θ.Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένας $x_o\in(-1,0):f'(x_o)=0$.

Επίσης $f''(x)=e^x+\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=e^x+\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}>0$

οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα οπότε η ρίζα x_o είναι μοναδική.
Τέλος:

Για κάθε $x<x_o \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(x_o)=0\Rightarrow f\downarrow$ στο $(-\infty,x_o]$

Για κάθε $x>x_o \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(x_o)=0\Rightarrow f\uparrow$ στο $[x_o,+\infty)$

Αρα το x_o είναι θέση μοναδικού ελάχιστου.

Γ3.●Η f είναι συνεχής στο R οπότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.
Είναι:

● $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x}\right)=0-1=-1$

γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x\cdot\dfrac{1}{x})=0$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(-x))=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+\sqrt{x^2+1}+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x})=0.$

Η $y=-x$ λοιπόν είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Επίσης

● $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}+\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)=$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}+\dfrac{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}{x}\right)=+\infty$ και η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

●Τέλος $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+\sqrt{x^2+1})=+\infty$ οπότε δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Γ4.Επειδή $f''(x)>0$ η f είναι κυρτή στο R.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(0,f(0))$ έχει εξίσωση την $y-f(0)=f'(0)(x-0)$ δηλ. την y=x+2.

Γ5.Η εξίσωση $f(1-f'(x))+f'(x)=3$ γράφεται:

$f(1-f'(x))=(1-f'(x))+2 \overset{1-f'(x)=u}{\Longleftrightarrow} f(u)=u+2$.

Απ' το ερώτημα Γ4 έχουμε ότι:

$u=0 \Leftrightarrow 1-f'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=1 \Leftrightarrow f'(x)=f'(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=0$.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.Είναι $f(x)=\left|3^x+(\alpha+1)x-1\right|\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq f(0), \forall x\in R$.Επομένως η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o=0$.Είναι παραγωγίσιμη στο R,οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα είναι $f'(0)=0$.

Εχουμε τώρα:

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\left|3^x+(\alpha+1)x-1\right|}{|x|}=$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\left|3^x+(\alpha+1)x-1\right|}{|x|}=\lim_{x\to0^+}\left|\frac{3^x+(\alpha+1)x-1}{x}\right|=\lim_{x\to0^+}\left|\frac{3^x-1}{x}+(\alpha+1)\right|=$$

$$\left|\lim_{x\to0^+}\frac{3^x-1}{x}+(\alpha+1)\right|==\left|\ln3+\alpha+1\right|,\text{ γιατί}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{3^x-1}{x}\overset{(\frac{0}{0})}{\underset{LH}{===}}\lim_{x\to0^+}(3^x\cdot\ln3)=\ln3.$$

Αρα η $f'(0)=0 \Leftrightarrow \left|\ln3+\alpha+1\right|=0 \Leftrightarrow \alpha=-1-\ln3$.

Δ2.α)Αφού $f'(x) > 5x^4 \Leftrightarrow (f(x)-x^5)' > 0$ η $\underbrace{f(x)-x^5}_{g}$ είναι γνησίως αύξουσα. Αρα:

●Αν $x > 0 \overset{g\nearrow}{\Rightarrow} f(x)-x^5 > f(0)-0^5 \Rightarrow f(x) > x^5+f(0)$ και επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^5+f(0)) = +\infty$ θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

●Αν $x < 0 \overset{g\nearrow}{\Rightarrow} f(x)-x^5 < f(0)-0^5 \Rightarrow f(x) < x^5+f(0)$ και επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^5+f(0)) = -\infty$ θα είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

β)Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R επομένως έχει σύνολο τιμών το $f(R) = (\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = (-\infty,+\infty) = R$ στο οποίο περιέχεται το μηδέν άρα η f έχει ,λόγω και της μονοτονίας μοναδική ρίζα.

Δ3.Αφου η C_g τέμνει τον $y'y$ στο σημείο Α(0,3) θα είναι $f(0)=3 \Leftrightarrow \delta=3$

Αφού παρουσιάζει στο 1 ακρότατο το 4 θα είναι:

$$f(1)=4 \text{ και } f'(1)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{r}\alpha+\beta+\gamma+3=4\\ 3\alpha+2\beta+\gamma=0\end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{array}{c}\alpha+\beta+\gamma=1\\ 3\alpha+2\beta+\gamma=0\end{array} \quad \textbf{(1)}$$

Είναι : $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$ **,**πιθανώς τριώνυμο. Ομως το ακρότατο στο 1 είναι μοναδικό. Η f' λοιπόν δεν μπορεί να είναι τριώνυμο άρα θα είναι **α=0**.Το σύστημα (1) γίνεται: $\left.\begin{array}{r}\beta+\gamma=1\\ 2\beta+\gamma=0\end{array}\right| \Leftrightarrow \beta=-1$ και $\gamma=2$.

Είναι τώρα $f'(x) = -2x+2$ με ρίζα το 1 και:

●Αν $x<1 \Rightarrow f'(x) > 0$

●Αν $x>1 \Rightarrow f'(x) < 0$

Αρα το 1 είναι θέση ολικού μέγιστου.

Δ4.Είναι $g(x) = (e^x - e)^2 \cdot (x-2)^2 \geq 0,\ \forall x \in R$,με το = να ισχύει για $x=1$ και $x=2$.Η g έχει λοιπόν δύο θέσεις ολικού ελάχιστου.

Στο [1,2] ,επειδή η f είναι συνεχής, έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.
Αφού τα άκρα είναι θέσεις ελάχιστου θα έχει μέγιστο σε ένα τουλάχιστον εσωτερικό σημείο του (1,2).