ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

183

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη:Συναρτήσεις-Παράγωγοι **9-11-2019**

ΘΕΜΑ Α

Α1.Να δώσετε τον ορισμό των ίσων συναρτήσεων. **(μον.2)**

Α2.Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής. **(μον.3)**

Α3.Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu},\ \nu\in N-\{0,1\}$ είναι παραγωγίσιμη στο R και να βρείτε την παράγωγό της. **(μον.10)**

Α4. Να κυκλώσετε το (Σ) ή το (Λ) στις προτάσεις:

1.Ενα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο. Σ Λ

2.Αν $\lim_{x\to x_o} f(x)>0$, τότε f(x)>0 κοντά στο x_o. Σ Λ

3.Για κάθε συνάρτηση $f:A\to R$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_o \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_o. Σ Λ

4.Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω απ' τον $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον $x'x$,των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από αυτόν τον άξονα. Σ Λ

5.Μια πολυωνυμική συνάρτηση $f:R\to R$ διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της. Σ Λ

(μον.10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$f: R \to R$ με τύπο $f(x)=x^2+1$ και

$g: [2,+\infty) \to R$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x-2}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g \circ f$ έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ και τύπο $(g\circ f)(x)=\sqrt{x^2-1}$. **(μον.5)**

Β2. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}[(g\circ f)(x)-x]=0$ και να δώσετε μια γεωμετρική ερμηνεία του. **(μον.6)**

Β3. Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο στο $x_o=2$ της συνάρτησης $h: A-\{2\}\to R$ με τύπο $h(x)=\dfrac{(g\circ f)(x)}{x-2}$. **(μον.6)**

Β4. Εστω η συνάρτηση

$$\varphi(x)=\begin{cases}(g\circ f)(x), & x\in A\\ 1-x^2, & x\in(-1,1)\end{cases}$$

Να εξετάσετε αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση $t(x)=\varphi(x)\cdot \eta\mu(\pi x)$ στο $[0,2]$. **(μον.8)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$, για την οποία ισχύει ότι $f(x)\cdot f'(x)=\dfrac{1}{2}$ για κάθε $x>0$ και της οποίας η C_f διέρχεται απ' το σημείο Μ(1,1). Εστω το σημείο $A\left(\dfrac{3}{2},0\right)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x},\ x\in[0,+\infty)$. **(μον.6)**

Γ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μοναδικό σημείο της C_f που απέχει από το σημείο Α τη μικρότερη απόσταση. **(μον.6)**

Γ3. Δίνεται επιπλέον μια συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $g:[0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει $0<g(x)<1$ για κάθε $x\geq 0$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μοναδική ρίζα x_o ,
Η οποία ανήκει στο διάστημα $(0,1)$. **(μον.6)**

Γ4. Αν για μια συνάρτηση h ισχύει $h(x)+h(1-x)=1$, h(0)=0 και η h είναι γνησίως αύξουσα στο R να λύσετε στο διάστημα $(0,\frac{\pi}{2})$ την εξίσωση $h(\eta\mu^2 x)+h(\sigma\upsilon\nu^2 x)=h(\varepsilon\varphi x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x})$. **(μον.7)**

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha, & x\geq 1 \\ e^{x-1}+\beta x, & x<1 \end{cases}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι α=1 και β=1. **(μον.5)**

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. **(μον.4)**

Δ3. Ενα σημείο $M(x,y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x), x\geq 1$.Τη χρονική στιγμή t_o κατά την οποία το σημείο Μ διέρχεται από το σημείο Α(3,10) , ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΜΟΚ τη χρονική στιγμή t_o, όπου $K(x,0)$. **(μον.6)**

Δ4. Δίνεται η συνάρτηση
$h:R\to R$ με τύπο $h(x)=(x-1)\ln(x^2-2x+2)+\alpha x+\beta$ όπου $\alpha, \beta\in R$ και η ευθεία $(\varepsilon): y=-x+2$, η οποία εφάπτεται της C_h στο σημείο Α(1,1).

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$ και $\beta=2$. **(μον.4)**

β) Να αποδείξετε ότι $h'(x)\geq -1$, για κάθε $x\in R$. **(μον.3)**

γ) Να αποδείξετε ότι $h(\lambda+\frac{1}{2})+\lambda\geq(\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)+\frac{3}{2}$ για κάθε $\lambda\in R$. **(μον.3)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις(Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

Α1, Α2, Α3, θεωρία Α4. 1 Σ, 2 Σ, 3 Λ, 4 Σ, 5 Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.Το πεδίο ορισμού της $g\circ f$ αποτελείται από τα x για τα οποία είναι:

$$\left.\begin{matrix} x\in A_f \\ f(x)\in A_g \end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix} x\in R \\ x^2+1\geq 2 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix} x\in R \\ x^2\geq 1 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix} x\in R \\ x\leq -1 \text{ ή } x\geq 1 \end{matrix}\right\}$$

Αρα $A_f=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ και

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{x^2+1-2}=\sqrt{x^2-1}$.

Β2.Εναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}[(g\circ f)(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=$

$=\dfrac{-1}{+\infty}=0$.

Γραφικά αυτό σημαίνει ότι η $C_{g\circ f}$ και η y=x ,πλησιάζουν πολύ κοντά για τα x κοντά σε περιοχή του $+\infty$.Η y=x είναι πλάγια ασύμπτωτη της $C_{g\circ f}$ στο $+\infty$.

Β3.Είναι $h(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$ με $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{0^-}=-\infty, \text{αν } x\to 2^- \\ \dfrac{\sqrt{3}}{0^+}=+\infty, \text{αν } x\to 2^+\end{cases}$

οπότε δεν υπάρχει το όριο της h στο 2.

Β4.Είναι: $t(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-1}\cdot ημ(\pi x), x\in A \\ (1-x^2)\cdot ημ(\pi x), x\in(-1,1)\end{cases}$ οπότε:

Η t είναι παραγωγίσιμη στο [0,1) και στο (1,2] ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επίσης: $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{t(x)-t(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(1-x^2)\cdot \eta\mu(\pi x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(1-x^2)\cdot \eta\mu(\pi x)}{x-1}=$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-(x-1)(x+1)\eta\mu(\pi x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)\eta\mu(\pi x)=2\cdot\eta\mu 0=0$ και

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{t(x)-t(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2-1}\cdot\eta\mu(\pi x)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\left(\sqrt{x^2-1}\cdot\frac{\eta\mu(\pi x)}{x-1}\right)=$$

$=0\cdot(-\pi)=0$ γιατί $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\eta\mu(\pi x)}{x-1}\overset{(\frac{0}{0})}{\underset{LH}{=}}\lim\limits_{x\to 1^+}(\pi\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi x))=-\pi$.

Η t λοιπόν είναι παραγωγίσιμη και στο 1 άρα παραγωγίσιμη στο (0,2).

Επειδή η t είναι παραγωγίσιμη στο 1 είναι και συνεχής σ' αυτό.
Είναι και συνεχής στα [0,1) και (1,2] ως πράξεις συνεχών άρα συνεχής στο [0,2].
Τέλος $t(0)=t(2)=0$.
Η συνάρτηση λοιπόν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1.Εχουμε:

$$2f(x)\cdot f'(x)=1\Leftrightarrow (f^2(x))'=(x)'\Leftrightarrow f^2(x)=x+c\overset{f(1)=1}{\underset{c=0}{\Leftrightarrow}} f^2(x)=x.$$

Αν x>0 η f δεν μηδενίζεται και επειδή είναι και συνεχής διατηρεί πρόσημο. Επειδή f(1)=1>0 είναι και f(x)>0 άρα $f(x)=\sqrt{x}$, x>0.
Η f είναι και συνεχής στο 0 άρα $f(x)=\sqrt{x}, x\in[0,+\infty)$.

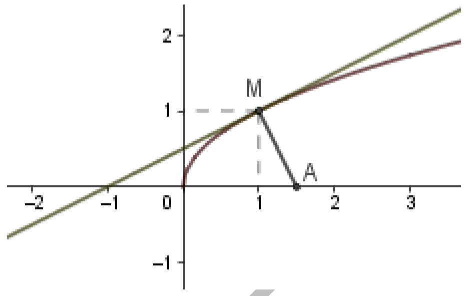
Γ2.Αν $N(x,f(x))$ δηλ. $N(x,\sqrt{x})$ θα είναι

$$(AN)=d(x)=\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2+(\sqrt{(x-0)^2}}=\sqrt{x^2-2x+\frac{9}{4}}$$ με παράγωγο

$$=d'(x)=\frac{2x-2}{2\cdot\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-2x+\frac{9}{4}}}=\frac{x-1}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-2x+\frac{9}{4}}}$$, με ρίζα το 1.

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον πίνακα:

x	0	1	$+\infty$
d'	–	+	
d	↘	↗	



Αρα η ελάχιστη τιμή της απόστασης d προκύπτει για x=1.Τότε είναι N(1,1) δηλ. το M(1,1).

Γ3.Θεωρούμε τη συνάρτηση $w(x)=f(x)-g(x), x\geq 0.$

●Η w είναι συνεχής στο [0,1] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

● $w(0)=f(0)=-g(0)<0$
$w(1)=f(1)-g(1)=1-g(1)>0$

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένας $x_o\in(0,1)$ ώστε $w(x_o)=0$.

Η w είναι γνησίως αύξουσα αφού οι f και $-g$ είναι γνησίως αύξουσες. Η x_o επομένως είναι μοναδική ρίζα της w στο (0,1).

Γ4.Η εξίσωση $h(\eta\mu^2 x)+h(\sigma\upsilon\nu^2 x)=h(\varepsilon\varphi x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x})$ γράφεται $h(\eta\mu^2 x)+h(1-\eta\mu^2 x)=h(\varepsilon\varphi x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x})$ και σύμφωνα με τη δοθείσα σχέση γράφεται $h(\varepsilon\varphi x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x})=1=h(1)\overset{h1-1}{\Leftrightarrow}\varepsilon\varphi x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}=1\Leftrightarrow$

$$\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\frac{e^{\sigma\upsilon\nu x}}{e^{\eta\mu x}}=1\Leftrightarrow \eta\mu x\cdot e^{-\eta\mu x}=\sigma\upsilon\nu x\cdot e^{-\sigma\upsilon\nu x}\underset{t\uparrow\sigma\tau o(0,1)}{\overset{t=xe^{-x}}{\Longleftrightarrow}}$$

$t(\eta\mu x)=t(\sigma\upsilon\nu x)\overset{t\ ,1\text{-}1}{\Longleftrightarrow}$ ημx=συνx και επειδή $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ είναι $x=\frac{\pi}{4}$.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.Αφού η f είναι παραγωγίσιμη είναι και συνεχής οπότε:
$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)\Rightarrow 1+\beta=1+\alpha\Rightarrow\alpha=\beta$.

Επίσης: $f'_\alpha(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{e^{x-1}+\beta x-(1+\alpha)}{x-1}\overset{(\frac{0}{0})}{\underset{LH}{==}}\lim\limits_{x\to1^-}(e^{x-1}+\beta)=1+\beta$ και

$f'_\delta(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+\alpha-(1+\alpha)}{x-1}\overset{(\frac{0}{0})}{\underset{LH}{==}}\lim\limits_{x\to1^-}(2x)=2$ οπότε 1+β=2 άρα β=1 και α=1.

Δ2.Είναι $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\ge 1\\ e^{x-1}+x, & x<1\end{cases}$ με $f'(x)=\begin{cases} 2x, & x\ge 1\\ e^{x-1}+1, & x<1\end{cases}$ οπότε

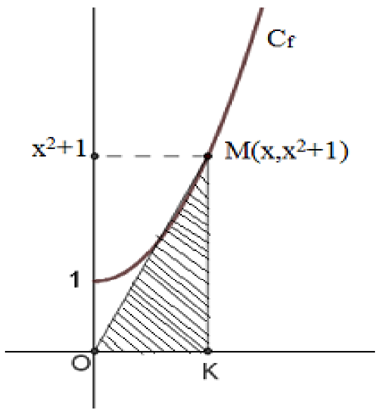
$f'(x)>0, \forall x\in R$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Εχει σύνολο τιμών το:

$f(A)=(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x), \lim\limits_{x\to+\infty}f(x))=(\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x-1}+x), \lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1))=$

$=(-\infty,+\infty)=R$.

Δ3.Εναι $E(t)=\dfrac{1}{2}(OK)\cdot(KM)=\dfrac{1}{2}x(t)\cdot[x^2(t)+1]\Rightarrow$



$\Rightarrow E(t)=\dfrac{1}{2}[x^3(t)+x(t)]\Rightarrow$

$\Rightarrow E'(t)=\dfrac{1}{2}[3x^2(t)\cdot x'(t)+x'(t)]\Rightarrow$

$\overset{t=t_o}{\Rightarrow} E'(t_o)=\dfrac{1}{2}(3\cdot 3^2\cdot 2+2)=\dfrac{56}{2}=28$ τ.μ./sec.

Δ4. α) Είναι: $h'(x)=\ln(x^2-2x-2)+(x-1)\cdot\dfrac{2(x-1)}{x^2-2x-2}+\alpha$ και

$\left.\begin{matrix} h(1)=1\\ h'(1)=-1\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}\alpha+\beta=1\\ \alpha=-1\end{matrix}\right\}\Rightarrow \alpha=-1$ και β=2 .

β) Είναι $h'(x)=\underbrace{\ln[(x-1)^2+1]}_{\ge 0}+\underbrace{\dfrac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}}_{\ge 0}-1\ge -1$ με το = να ισχύει

για x=1.Είναι λοιπόν $h'(x)\ge -1$.

γ)Δείξαμε στο β) ερώτημα ότι $h'(x)\ge -1$ άρα:

$(h(x)+x)'\ge 0$ οπότε η w(x)=h(x)+x είναι γνησίως αύξουσα.

Θα δείξουμε τώρα ότι:

$$h\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda \geq (\lambda-1)\cdot\ln(\lambda^2-2\lambda+2)+\frac{3}{2} \overset{(+\frac{1}{2})}{\Leftrightarrow}$$

$$h\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda+\frac{1}{2} \geq (\lambda-1)\cdot\ln(\lambda^2-2\lambda+2)-\lambda+2+\lambda \Leftrightarrow$$

$$h\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda+\frac{1}{2} \geq h(\lambda)+\lambda \Leftrightarrow w(\lambda+\frac{1}{2}) \geq w(\lambda) \overset{w\uparrow}{\Leftrightarrow} \lambda+\frac{1}{2} \geq \lambda$$

που ισχύει.