ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

182

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη:Ολη **11-5-2019**

<u>ΘΕΜΑ Α:</u>

Α1. Να δώσετε τον ορισμό του εμβαδού του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες x=α και x=β. **(7 μον.)**

Α2. Θεωρήστε τον ισχυρισμό:

«Δύο συναρτήσεις λέγονται ίσες, όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και τον ίδιο τύπο.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στην κόλλα σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. **(1 μον.)**

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. **(4 μον.)**

Α3.α. Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0, και ισχύει $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

β. Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f, g, h είναι παραγωγίσιμες τότε και η $f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)$ είναι παραγωγίσιμη, και να βρείτε την παραγωγό της. **(2x4=8μον.)**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2}}{x},\ x\neq 0$ είναι σταθερή.

β. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ και $g(x) < 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = -\infty$.

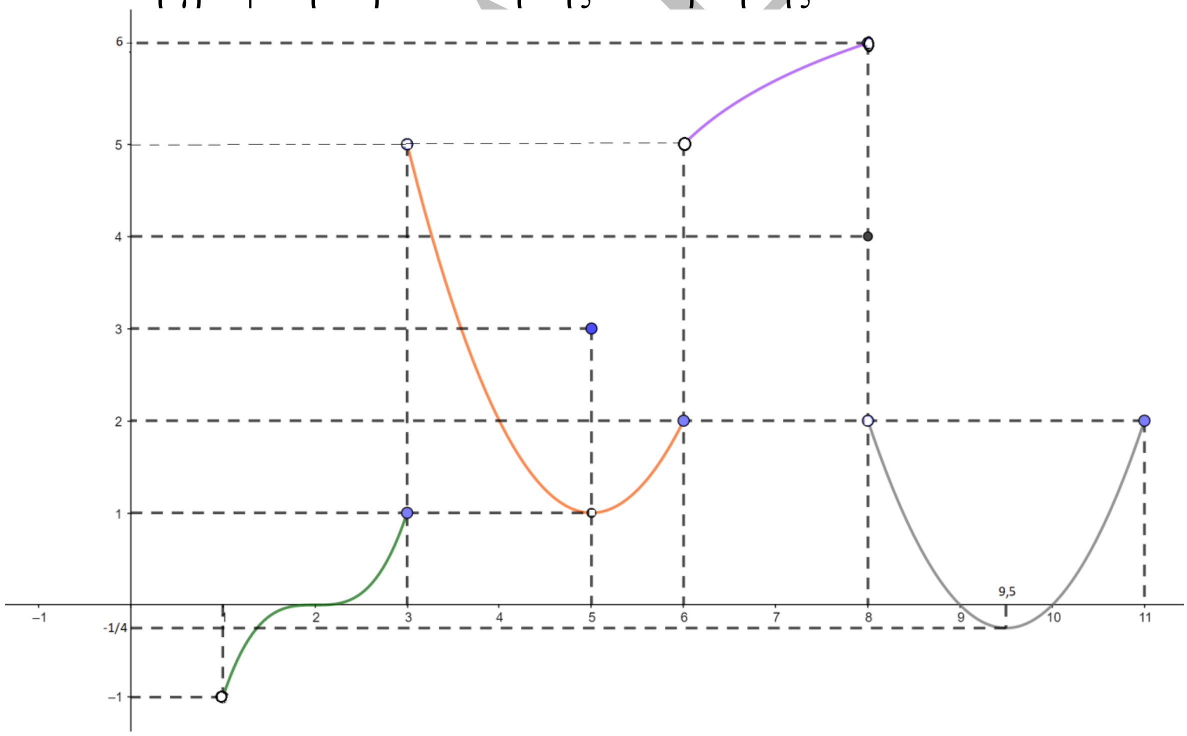
γ. Η $f(x) = \ln|x|,\ x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

δ. Αν για μια παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, ισχύει ότι $f'(x) = e^x \cdot \eta\mu 2$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

ε. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx \ge 0$, τότε $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$. **(5x1=5μον.)**

ΘΕΜΑ Β:

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης:



Β1.1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f. **(4 μον.)**

2. Να βρείτε αν υπάρχουν τα :

α. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **β.** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ **γ.** $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ **δ.** $\lim\limits_{x\to 8} f(x)$ **(4 μον.)**

3. Να βρείτε αν υπάρχουν τα :

α. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{f(x)}$ **β.** $\lim\limits_{x\to 6} f(f(x))$ **(4 μον.)**

4. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής. **(3 μον.)**

5. Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'(x_0)=0$. **(3 μον.)**

B2. Ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με τετράγωνη βάση και ανοικτό από πάνω πρέπει να έχει όγκο $32dm^3$. Να βρείτε ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του κουτιού, ώστε για την κατασκευή του να χρειάζεται το ελάχιστο δυνατό υλικό.

(7 μον.)

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_0^1 \varepsilon\varphi(xt)dt$ με $x\in[0,\frac{\pi}{2})$

Γ1. Να βρείτε τον τύπο της f. **(μον.4)**

Γ2. Αν $f(x)=\begin{cases} -\frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)}{x}, & 0<x<\frac{\pi}{2} \\ 0, & x=0 \end{cases}$ να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A)=[0,+\infty)$. **(μον.7)**

Γ3. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει την y=2016 σε ένα σημείο και να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f. **(μον.4)**

Γ4. Αν $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$ και α<β να δείξετε ότι $(\sigma\upsilon\nu\alpha)^\beta>(\sigma\upsilon\nu\beta)^\alpha$. **(μον.5)**

Γ5. Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ και $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(\xi)=\sqrt{f(x_1)\cdot f(x_2)}$. **(μον.5)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα σημεία $M(1,\alpha^{\eta\mu x})$, $N(1+\eta\mu x,1)$ με $x\in R$, $\alpha>0$, M' το συμμετρικό του M ως προς τον $x'x$ και N' το συμμετρικό του N ως προς τον $y'y$ για τα οποία ισχύει ότι $(NM')\geq(MN')$, $\forall x\in R$.

Δ1.Να αποδείξετε ότι $1+\eta\mu x-\alpha^{\eta\mu x}\leq 0$, $\forall x\in R$ **(μον.4)**

Δ2.Να αποδείξετε ότι α=e. **(μον.4)**

Δ3.Δίνεται παραγωγίσιμη, μη σταθερή συνάρτηση $g:[0,1]\to R$ με συνεχή την g', g(0)=1 και $\forall x\in[0,1]$ ισχύει:
$\int_0^1[g'(x)]^2dx+\int_0^1 g^2(x)dx+1=g^2(1)$.

1.Να δείξετε ότι $\int_0^1[g'(x)-g(x)]^2dx=0$. **(μον.5)**

2.Να βρείτε τον τύπο της g. **(μον.3)**

Δ4. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει ότι $H(x)-H(0)=g(x)\cdot f(x)+x-1,\forall x\in R$ **(1)**.
Αν η g έχει τύπο $g(x)=e^x$ και H(x) αρχική της $g(x)\cdot f(x)$ να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f. **(μον.5)**

Δ5.Δείξτε ότι το εμβαδόν E(t) του χωρίου που περικλείεται απ' την C_f, τον $x'x$, τον $y'y$ και την $x=t$, t>0 αυξάνει με μειούμενο ρυθμό και βρείτε το $\lim_{t\to+\infty}E(t)$. **(μον.4)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις(Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α:

Α1. Σχ. βιβλίο

Α2.α. Ψ

β. Έστω $f(x)=x^2,\ x\in\{0,1\}$ και $g(x)=x^3,\ x\in\{0,1\}$.
Τότε οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες, παρότι δεν έχουν τον ίδιο τύπο.

Α3. i. Σχ. βιβλίο
ii. Σχ. βιβλίο

Α4. α. Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Λάθος

ΘΕΜΑ Β:

Β1.1. Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης προκύπτει ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $(1,11]$ και το σύνολο τιμών της είναι το $B=(1,5)\cup(5,6)$.

2. α. $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-1$.

β. $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=1$ και $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=5$ οπότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to3}f(x)$.

γ. $\lim\limits_{x\to5}f(x)=1$.

δ. $\lim\limits_{x\to8^-}f(x)=6$ και $\lim\limits_{x\to8^+}f(x)=2$ οπότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to8}f(x)$.

3. α. $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{f(x)}\underset{f(x)<0\text{ κοντά στο }2^-}{\overset{\lim_{x\to2}f(x)=0}{=}}-\infty$ και $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{1}{f(x)}\underset{f(x)>0\text{ κοντά στο }2^+}{\overset{\lim_{x\to2}f(x)=0}{=}}+\infty$,

οπότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{f(x)}$.

β. $\lim\limits_{x\to6^-}f(x)=2$ και $\lim\limits_{x\to6^+}f(x)=5$ οπότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to6}f(x)$. Επομένως δεν υπάρχει και το $\lim\limits_{x\to6}f(f(x))$.

4. Η f δεν είναι ασυνεχής στα :

*****Στο $x_0 = 3$ εφόσον δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

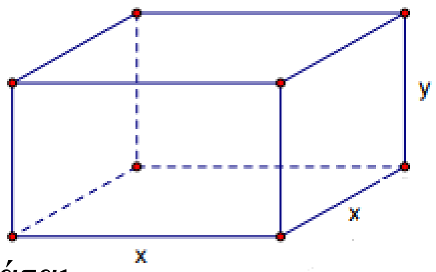
*Στο $x_0 = 5$ εφόσον $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 1$ και $f(5) = 3$.

*Στο $x_0 = 6$ εφόσον δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 6} f(x)$.

*Στο $x_0 = 8$ εφόσον δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 8} f(x)$.

5. Τα σημεία του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'(x_0)$ =0 είναι $x_0 = 2$ και $x_0 = 9{,}5$ εφόσον σ' αυτά η γραφική παράσταση της f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

Β2. Έστω x, x, y > 0 οι διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.



Όγκος V = 32 ⇔ $x^2 y = 32 \Leftrightarrow y = \dfrac{32}{x^2}$ (1)

Η ποσότητα του υλικού, που απαιτείται για την κατασκευή του παραλληλεπιπέδου, εξαρτάται από την επιφάνειά του Ε. Η συνολική επιφάνεια είναι $E = x^2 + 4xy$ οπότε από την (1) έχουμε:

$$E(x) = x^2 + \frac{128}{x}, x > 0 .$$

Η συνάρτηση αυτή εκφράζει την επιφάνεια, της οποίας αναζητάμε το ελάχιστο. Οπότε είναι:

$E'(x) = 2x - \dfrac{128}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 128}{x^2}$. Λύνουμε την εξίσωση:

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 128 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 64 \Leftrightarrow x = 4\text{dm}.$$

Ο πίνακας μεταβολών της $E(x)$ είναι:

x	0		4	$+\infty$
$E'(x)$		-	0	+
$E(x)$		↘		↗

Παρατηρούμε ότι η επιφάνεια του κουτιού γίνεται ελάχιστη, όταν οι διαστάσεις του είναι x=4dm και y=2dm.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Εχουμε:

$$f(x)=\int_0^1 \text{εφ}(xt)dt \underset{xdt=du}{\overset{xt=u\Rightarrow}{=\!=\!=}} \int_0^x \text{εφ}u\cdot\frac{1}{x}du=\frac{1}{x}\int_0^x \text{εφ}u\,du=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{\text{ημ}u}{\text{συν}u}du=$$

$$=\frac{1}{x}[-\ln(\text{συν}u)]_0^x=-\frac{1}{x}\cdot\ln(\text{συν}x)\ \text{δηλ.}\ f(x)=-\frac{\ln(\text{συν}x)}{x},\ x\in(0,\frac{\pi}{2}).$$

Επίσης $f(0)=\int_0^1 \text{εφ}(0\cdot t)dt=0$. Αρα $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\ln(\text{συν}x)}{x}, & x\in(0,\frac{\pi}{2})\\ 0, & x=0\end{cases}$

Γ2. Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}[-\dfrac{\ln(\text{συν}x)}{x}]\overset{(\frac{0}{0})}{\underset{LH}{=\!=}}\lim\limits_{x\to0^+}(\dfrac{\text{ημ}x}{\text{συν}x})=\lim\limits_{x\to0^+}(\text{εφ}x)=0=f(0)$.

Η f λοιπόν είναι συνεχής στο 0. Επίσης είναι συνεχής στο $(0,\frac{\pi}{2})$

ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Αρα η f είναι συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{2})$.

Είναι $f'(x)=[-\dfrac{\ln(\text{συν}x)}{x}]'=-\dfrac{\frac{-\text{ημ}x}{\text{συν}x}x-\ln(\text{συν}x)}{x^2}=\dfrac{x\text{εφ}x+\ln(\text{συν}x)}{x^2}$.

Θεωρώ $g(x)=x\text{εφ}x+\ln(\text{συν}x)$ οπότε $g'(x)=\text{εφ}x+x\cdot\dfrac{1}{\text{συν}^2x}-\text{εφ}x=$

$=\dfrac{x}{\text{συν}^2x}>0$ άρα $g\nearrow \overset{x>0}{\Rightarrow} g(x)>g(0)=0\Rightarrow f'(x)>0\to f\nearrow$,

άρα $f([0,\frac{\pi}{2}))=[0,+\infty)$ γιατί $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}[-\dfrac{\ln(\text{συν}x)}{x}]=\dfrac{+\infty}{\frac{\pi}{2}}=+\infty$.

Γ3. Το $2016\in f(A)$ άρα η C_f τέμνει την οριζόντια ευθεία y=2016 σε ένα σημείο, μοναδικό αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

Επειδή $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=+\infty$ η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=\frac{\pi}{2}$.

Δεν έχει οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη αφού $A=[0,\frac{\pi}{2})$.

Γ4.Είναι $\alpha<\beta \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(\alpha)<f(\beta)\Rightarrow -\dfrac{\ln(\sigma\upsilon\nu\alpha)}{\alpha}<-\dfrac{\ln(\sigma\upsilon\nu\beta)}{\beta}\Rightarrow$

$\beta\ln(\sigma\upsilon\nu\alpha)>\alpha\ln(\sigma\upsilon\nu\beta)\Rightarrow \ln(\sigma\upsilon\nu\alpha)^{\beta}>\ln(\sigma\upsilon\nu\beta)^{\alpha}\Rightarrow$

$\Rightarrow (\sigma\upsilon\nu\alpha)^{\beta}>(\sigma\upsilon\nu\beta)^{\alpha}$

Γ5.Αφού η f είναι συνεχής στο [α, β] θα έχει ελάχιστη (m) και μέγιστη (M) τιμή, και επειδή η f είναι $\nearrow$ υπάρχουν

$$x_1,x_2\in[\alpha,\beta]: \left.\begin{matrix} m\le f(x_1)<M \\ m<f(x_2)\le M\end{matrix}\right| \overset{(\cdot)}{\Rightarrow} m^2<f(x_1)\cdot f(x_2)<M^2\Rightarrow$$

$$m<\sqrt{f(x_1)\cdot f(x_2)}<M\Rightarrow \exists\xi\in(\alpha,\beta): f(\xi)=\sqrt{f(x_1)\cdot f(x_2)}\,.$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.Είναι $M'(1,-\alpha^{\eta\mu x})$, $N'(-1-\eta\mu x,1)$, οπότε η $(NM')\ge(MN')\Rightarrow$

$$\sqrt{(1-1-\eta\mu x)^2+(-\alpha^{\eta\mu x}-1)^2}\ge\sqrt{(-2-\eta\mu x)^2+(1-\alpha^{\eta\mu x})^2}\Rightarrow \ldots$$

(μετά τις αντίστοιχες πράξεις) $1+\eta\mu x-\alpha^{\eta\mu x}\le 0$.

Δ2. Η $\varphi(x)=1+\eta\mu x-\alpha^{\eta\mu x}$ έχει, σύμφωνα με το Δ1, μέγιστη τιμή το 0, και αυτό συμβαίνει στη θέση $x=\kappa\pi,\ \kappa\in Z$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat θα είναι $\varphi'(\kappa\pi)=0$.

Είναι $\varphi'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\alpha^{\eta\mu x}\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln\alpha$ άρα

$\sigma\upsilon\nu(\kappa\pi)-\alpha^{\eta\mu(\kappa\pi)}\cdot\sigma\upsilon\nu(\kappa\pi)\cdot\ln\alpha=0\Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\kappa\pi)\cdot(1-\alpha^{\eta\mu(\kappa\pi)}\cdot\ln\alpha)=0$

$(\pm1)\cdot(1-\alpha^{0}\cdot\ln\alpha)=0\Rightarrow 1-\ln\alpha=0\Rightarrow\alpha=e$.

Σχόλιο: Κάνουμε επαλήθευση…

Δ3. 1.Εχουμε:

$$\int_0^1[g'(x)-g(x)]^2dx=\int_0^1[g'(x)]^2dx+\int_0^1 g^2(x)dx-\int_0^1 2g'(x)g(x)dx\overset{(\upsilon\pi)}{=}$$

$$=g^2(1)-1-[g^2(x)]_0^1=g^2(1)-1-(g^2(1)-g^2(0))=0.$$

Είναι λοιπόν $\int_0^1[g'(x)-g(x)]^2dx=0$

2.Απ' το (Δ1) είναι $\int_0^1[g'(x)-g(x)]^2dx=0$ άρα

$$[g'(x)-g(x)]^2=0\Leftrightarrow g'(x)=g(x)\Leftrightarrow\ g(x)=c\cdot e^x \underset{c=1}{\overset{g(0)=1}{\Rightarrow}} g(x)=e^x.$$

Δ4. Η $H(x)-H(0)=g(x)\cdot f(x)+x-1$ γράφεται:

$$H(x)-H(0)=e^{x}\cdot f(x)+x-1 \overset{\pi\alpha\rho.}{\Rightarrow} (H(x))'-(H(0))'=e^{x}\cdot f(x)+x-1$$

$$\Leftrightarrow e^{x}\cdot f(x)=e^{x}\cdot f(x)+e^{x}\cdot f'(x)+1 \Leftrightarrow f'(x)\cdot e^{x}=-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=-e^{-x} \Leftrightarrow f'(x)=(e^{-x})' \Leftrightarrow f(x)=e^{-x}+c_2 \underset{c_2=0}{\overset{f(0)=1}{\Rightarrow}} f(x)=e^{-x}.$$

Σχόλιο: Κάνουμε επαλήθευση…

Δ5.Είναι: $E(t)=\int_0^1 |f(x)|dx=\int_0^t |e^{-x}|dx=\int_0^t e^{-x}dx=[-e^{-x}]_0^t=-e^{-t}+1.$

Επειδή $E'(t)=e^{-t}>0$ και $E''(t)=-e^{-t}<0$ το εμβαδόν αυξάνει με μειούμενο ρυθμό.

Τέλος $\lim\limits_{t\to+\infty} E(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}(-e^{-t}+1)=0+1=1.$