ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

180

Υλη:Ολη **Θετ-Τεχν. Κατ**

Ον/μο:……………….. **Γ΄Λυκείου**

30-3-19

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μία συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ η οποία είναι 1-1.Πότε μία συνάρτηση g λέγεται αντίστροφη συνάρτηση της f;

(5 μον.)

Α2. Θεωρήστε τον ισχυρισμό:

« Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f,g:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right]=0$.»

α.Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στην κόλλα σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. **(1 μον.)**

β.Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. **(3 μον.)**

Α3. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

* Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ.

* Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$, **(6μον.)**

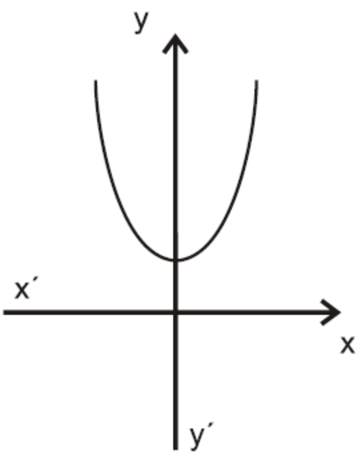
Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. $\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\beta}^{\alpha} f(x)g'(x)dx$.

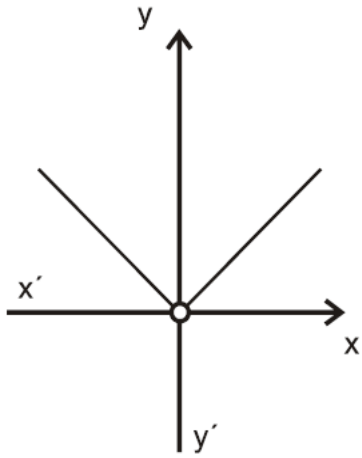
β. Μία πολυωνυμική συνάρτηση 3ου βαθμού έχει πάντα ένα σημείο καμπής.

γ. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. **(6μον.)**

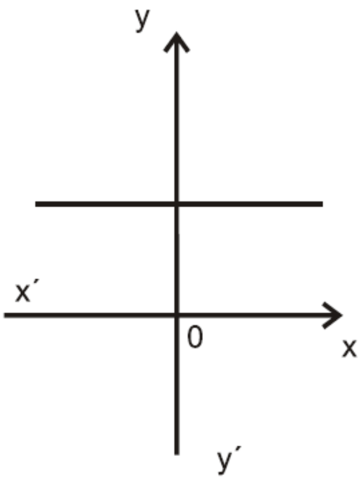
Α5. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων
f, g, F, G, H, T.



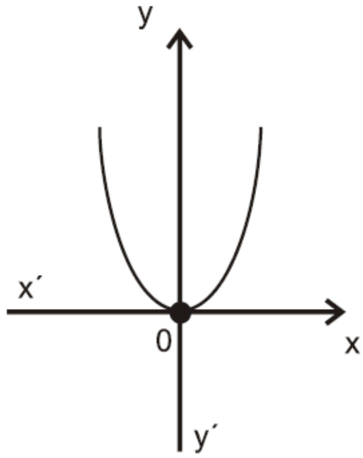
(f)



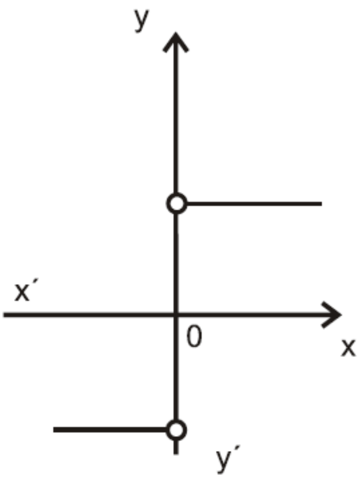
(g)



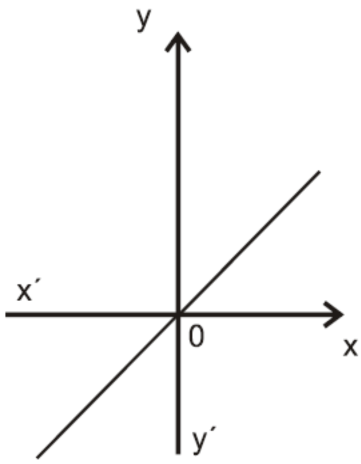
(F)



(G)



(H)



(T)

Να γράψετε στην κόλλα σας ποια από τις συναρτήσεις
F, G ,H ,T μπορεί να είναι η παράγωγος της f και ποια της g. **(4 μον.)**

ΘΕΜΑ Β:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+2}{x}, & x>1 \\ x^3+\alpha, & x\le 1 \end{cases}$.

Β1. Να υπολογίσετε το $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η f να είναι συνεχής. **(4 μον.)**

Στα παρακάτω ερωτήματα, θεωρήστε ότι α=2.

Β2. Να εξετάσετε αν η f ικανοποιεί τις υποθέσειςτου θεωρήματος Μέσης Τιμής στο [0,2]. **(5 μον.)**

Β3. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την $y=2019$ και να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης σ' αυτό το σημείο. **(6 μον.)**

Β4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. **(7 μον.)**

Β5. Να βρείτε το εμβαδό που ορίζεται από τη C_f τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες x=1 και x=2. **(3 μον.)**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.Έστω $f:(0,+\infty)\to R$ συνεχής συνάρτηση με $F(1)=0$, $2+F(x)=2x\cdot f(x)$ για κάθε x>0 , F παράγουσα της f .

Να αποδείξετε ότι :

1.Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. **(μον.4)**

2. Η συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot\sqrt{x}$ είναι σταθερή. **(μον.8)**

3. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **,** x>0. **(μον.4)**

Γ2.Η συνάρτηση f:R $\to$ R είναι συνεχής στο σημείο x_0=0 και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2x}{x^2}$=4. Να δείξετε ότι :

1. f(0)=0. **(μον.3)**

2.Η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο M(0,f(0)) έχει εξίσωση $y=2x$. **(μον.3)**

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$=8. **(μον.3)**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^x\cdot συνx, & -\frac{\pi}{2}\le x<0 \\ \sqrt{1+2ημx\cdot συνx}, & 0\le x\le \frac{\pi}{2} \end{cases}$

α) Να μελετήσετε τη συνέχεια της f. **(μον.3)**

β) Να εξετάσετε αν η C_f έχει ασύμπτωτες. **(μον.3)**

γ) Να βρείτε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ **(μον.7)**

Δ2. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο R, όπου F παράγουσα της f και τη συνάρτηση h με τύπο $h(x)=F(x^2-2x)-F(x+4)-x^2+3x+4,\ x\in R$.

1. Να δείξετε ότι η h είναι παραγωγίσιμη στο R και να βρείτε την h'. **(μον.3)**

2. Έστω ότι για την h ισχύει $h(x)\le 0$ για κάθε $x\in R$.

α) Να βρείτε την τιμή f(3). **(μον.6)**

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(3,8)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi)=0$. **(μον.3)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχ. βιβλίο σελ.

Α2.α. Ψ

β. Έστω $f(x)=-\frac{1}{x^2}+1$ και $g(x)=\frac{1}{x^2}$. Τότε είναι:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+1\right)=-\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)=+\infty \text{ ενώ, είναι:}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+1+\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}1=1$$

Α3. Σχ. βιβλίο σελ.

Α4. α. Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Λάθος

Α5. Η παράγωγος της f είναι η Τ και η παράγωγος της g είναι η Η.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι συνεχής για $x>1$ και για $x<1$ ως ρητή πολυωνυμική και πολυωνυμική αντίστοιχα. Για να είναι συνεχής και στο $x=1$ πρέπει:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x+2}{x}\right)=1+\alpha \Leftrightarrow$$

$$3=1+\alpha \Leftrightarrow \alpha=2.$$

Για α=2 είναι: $f(x)=\begin{cases}\frac{x+2}{x}, & x>1\\ x^3+2, & x\le 1\end{cases}$

B2. Η f είναι παραγωγίσιμη για $x>1$ ως ρητή πολυωνυμική με $f'(x)=\left(\frac{x+2}{x}\right)'=\frac{x-x-2}{x^2}=-\frac{2}{x^2}$ και είναι παραγωγίσιμη για $x<1$ ως πολυωνυμική με $f'(x)=\left(x^3+2\right)'=3x^2$.Για x=1 έχουμε:

* $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\frac{x+2}{x}-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x+2-3x}{x(x-1)}=$
  $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{-2(x-1)}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{-2}{x}=-2\in\mathbb{R}.$

* $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^3+2-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x-1}=$
  $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+x+1\right)=3\in\mathbb{R}.$

Εφόσον, $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x=1, οπότε δεν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο[0,2].

B3. Έχουμε ότι: $f'(x)=\begin{cases}-\frac{2}{x^2}, & x>1\\ 3x^2, & x<1\end{cases}$. Έστω $M(\omega,f(\omega))$, το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στην y=2019. Τότε πρέπει $f'(\omega)=0$. Για $x>1$ είναι $f'(x)<0$. Για $x<1$ έχουμε: $f'(\omega)=0\Leftrightarrow 3\omega^2=0\Leftrightarrow\omega=0$.
Το ζητούμενο σημείο είναι το $M(0,f(0))$ δηλ. το $M(0,2)$ και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο αυτό είναι:
$\varepsilon: y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y=2$.

Β4. Για τη χάραξη της γραφικής παράστασης της f έχουμε:

<u>Ασύμπτωτες:</u>

*<u>Κατακόρυφες</u>:

Δεν έχει εφόσον είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

*<u>Οριζόντιες και πλάγιες</u>:

Στο $-\infty$ δεν έχει γιατί είναι πολυωνυμική $3^{ου}$ βαθμού.

Στο $+\infty$ έχουμε:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2}{x} = 1$ οπότε η y=1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

<u>Σημεία τομής με τους άξονες:</u>

Τέμνει τον άξονα $x'x$ όταν $f(x)=0$. Για $x>1$ είναι

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=-2$ απορ. και για $x<1$ είναι

$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3=-2 \Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{2}$.

Τέμνει τον άξονα $y'y$ όταν x=0 στο $f(0)=2$.

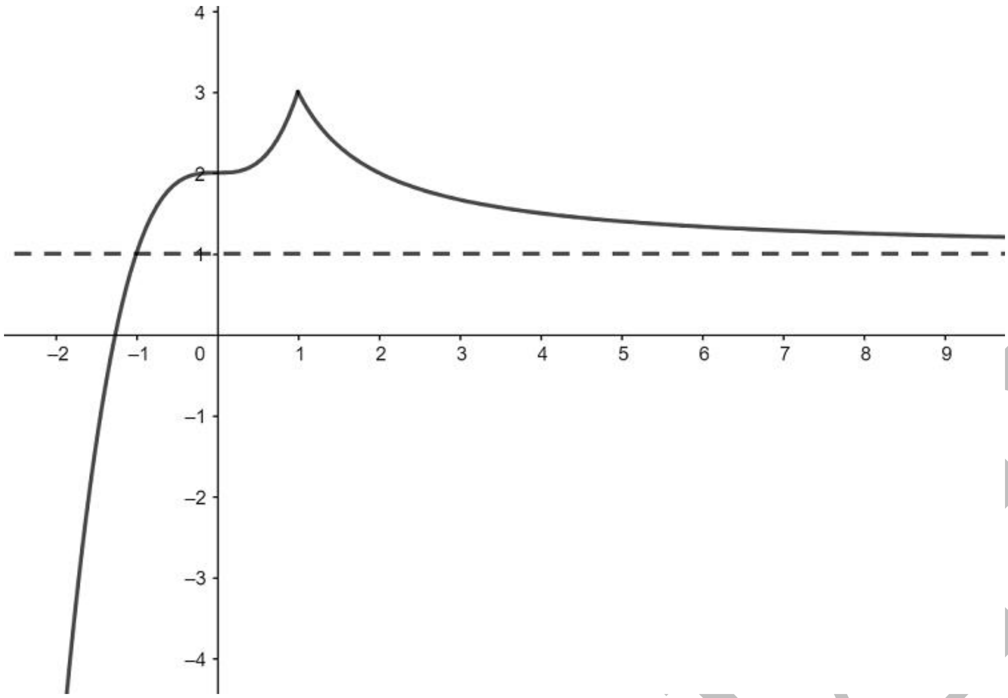
<u>Μονοτονία, ακρότατα, καμπυλότητα:</u>

Είναι: $f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{2}{x^2}, & x>1 \\ 3x^2, & x<1 \end{cases}$ οπότε: $f''(x)=\begin{cases} \dfrac{4}{x^3}, & x>1 \\ 6x, & x<1 \end{cases}$

Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
f'	+	0	+	‖	−	
f''	−	0	+	‖	+	
f	↗ ∩		↗ ∪		↘ ∪	

Η f παρουσιάζει μέγιστο για x=1 το 3 και σημείο καμπής για x=0 το 2. Η γραφικής της παράσταση είναι:



B5.Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E=\int_1^2|f(x)|dx=\int_1^2\left|\frac{x+2}{x}\right|dx=\int_1^2\left|1+\frac{2}{x}\right|dx=\int_1^2\left(1+\frac{2}{x}\right)dx=$$

$$=\left[x+2\ln x\right]_1^2=2+\ln 4-1=1+\ln 4.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

1.Η ισότητα $2+F(x)=2x\cdot f(x)$ δίνει $f(x)=\dfrac{2+F(x)}{2x},x>0$.

Επειδή η F είναι παράγουσα της f, είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$,άρα η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων.

2. Παραγωγίζω την ισότητα $2+F(x)=2xf(x)$ και παίρνω

$f(x)=2f(x)+2xf'(x)\Rightarrow f(x)+2xf'(x)=0$ **(1)**

Είναι , $\forall x>0,\quad g'(x)=(f(x)\cdot\sqrt{x})'=f'(x)\sqrt{x}+f(x)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=$

$=\dfrac{2xf'(x)+f(x)}{2\sqrt{x}}\overset{(1)}{=}\dfrac{0}{2\sqrt{x}}=0$, άρα $g(x)=c$ **(2)**

4. Από την $g(x)=f(x)\sqrt{x}\Rightarrow f(x)=\dfrac{g(x)}{\sqrt{x}}$ **(3)**

Η (2) για x=1 δίνει $g(1)=c$

Η $g(x)=f(x)\sqrt{x}$ για x=1 δίνει $g(1)=f(1)$

Η αρχική ισότητα ,$2+F(x)=2xf(x)$,για x=1 δίνει $2=2f(1)\Rightarrow f(1)=1$

Άρα g(1)=1 και η (2) δίνει $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Γ2. 1. Έστω $\dfrac{f(x)-2x}{x^2}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=x^2\cdot g(x)+2x\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0\cdot 4+2\cdot 0\Rightarrow f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$,αφού f συνεχής στο x_o.

2.Είναι $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot g(x)+2x}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[x\cdot g(x)+2\right]=2$ οπότε $\varepsilon: y-f(0)=f'(0)(x-0)$ δηλ. $\varepsilon: y=2x$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2ημx}{1-συνx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot g(x)+2x-2ημx}{1-συνx}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x^2}{1-συνx}\cdot g(x)+\dfrac{2x-2ημx}{1-συνx}\right]:=2\cdot 4+0=8$

γιατί : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-συνx}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{LH}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{ημx}=2\cdot 1=2$ και

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-2ημx}{1-συνx}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{LH}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-2συνx}{ημx}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{LH}{=}}\dfrac{2ημx}{συνx}=\lim\limits_{x\to 0}(2εφx)=0$.

ΘΕΜΑ Δ

Α. α) Η f είναι συνεχής στο $[-\frac{\pi}{2},0)$ ως γινόμενο συνεχών , συνεχής στο $(0,\frac{\pi}{2}]$ ως σύνθεση συνεχών. Ακόμη :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim\left(e^x\cdot συνx\right)=e^0\cdot συν0=1\ ,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{1+2ημx\cdot συνx}\right)=\sqrt{1+ημ0\cdot συν0}=1 \text{ και}$$

$$f(0)=\sqrt{1+2ημ0}=1$$

Η f λοιπόν είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

β) Αφού η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη .
Επειδή δεν υπάρχει περιοχή του $+\infty$ ή $-\infty$ στο πεδίο ορισμού της δεν έχει πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη .

γ) Το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=$

$$=\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^x\cdot συνx\cdot dx}_{I_1}+\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+2ημx\cdot συνx}\,dx}_{I_2}\ .$$

Είναι : $I_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^x συνxdx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(e^x)'συνxdx=\left[e^x συνx\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^x\cdot ημxdx=$

$$=e^0\cdot συν0-e^{-\frac{\pi}{2}}συν\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(e^x)'\cdot ημxdx=$$

$$=1+\left[e^x\cdot ημx\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^x\cdot συνxdx\ .$$

Αρα $2I_1=1+\left(e^0ημ0-e^{-\frac{\pi}{2}}ημ\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\Rightarrow 2I_1=1+e^{-\frac{\pi}{2}}\Rightarrow I_1=\dfrac{1+e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}$ και

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x+2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}\,dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)dx=$$

$$=\left[-\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}==\left(-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}+\eta\mu\frac{\pi}{2}\right)-(-\sigma\upsilon\nu 0+\eta\mu 0)=1+1=2$$

Άρα $E=I_1+I_2\Rightarrow E=\dfrac{1+e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}+2$

Β. 1. Η F είναι παραγωγίσιμη άρα η h είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων .Η παράγωγός της

$h(x)=F(x^2-2x)-F(x+4)-x^2+3x+4$, **(1)**, είναι:

$h'(x)=f(x^2-2x)(x^2-2x)'-f(x+4)\cdot(x+4)'-2x+3$ δηλ .

$h'(x)=(2x-2)\cdot f(x^2-2x)-f(x+4)-2x+3$ **(2).**

2. α) Είναι $h(x)\leq 0$ για κάθε $x\in R$.

Παρατηρώ, από την (1), ότι το = ισχύει για x=-1 , ή x=4 αφού h(-1)=0 και h(4)=0 . Η h λοιπόν έχει ελάχιστο το 0. Σύμφωνα με το Θ.Fermat θα είναι:

$$h'(-1)=0\overset{(2)}{\Rightarrow}-4\cdot f(3)-f(3)+5=0\Rightarrow f(3)=1.$$

β) Οπως στο α) θα είναι $h'(4)=0\Rightarrow 6\cdot f(8)-f(8)-5=0\Rightarrow f(8)=1.$

Εχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\eta\ f\ \text{είναι συνεχής στο }[3,8]\\ \eta\ f\ \text{είναι παραγωγ. στο }(3,8)\\ f(3)=f(8)\end{array}\right\}\overset{\theta.\text{Rolle}}{\Rightarrow}\ \exists\ \text{τουλάχ. ένας }\xi\in(3,8):f'(\xi)=0$$