ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

179

ΥΛΗ:Παράγωγοι **Γ΄Λυκείου**

Ον/μο:…………… **Θετ-Τεχν Κατ**

16/02/19

ΘΕΜΑ Α:

Α1.α. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Fermat. **(μον.2)**

β. Να αποδείξετε το Θεώρημα Fermat. **(μον.5)**

Α2. Θεωρήστε τον ισχυρισμό:

« Αν μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, είναι κυρτή, τότε θα ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στην κόλλα σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. **(μον.1)**

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. **(μον.3)**

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών. **(μον.4)**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}, x\neq 0$ είναι σταθερή. Σ Λ

β. Αν $(1-x)(1+5x)\leq f(x)\leq (3x+1)^2$, τότε η f είναι συνεχής στο 0. Σ Λ

γ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, τότε ορίζεται πάντα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0,f(x_0))$. Σ Λ

δ. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x)<0, x\in\mathbb{R}$ τότε η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$. Σ Λ

ε. Μία πολυωνυμική συνάρτηση 3^{ου} βαθμού έχει οπωσδήποτε σημείο καμπής. Σ Λ

(μον.10)

ΘΕΜΑ Β:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$.

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **(μον.7)**

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. **(μον.5)**

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. **(μον.6)**

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. **(μον.7)**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να λύσετε το σύστημα $\begin{matrix} x+e^{x-1}=y+e^{y-1} \\ x^2+xy+y^2=12 \end{matrix}$ **(μον.5)**

Γ2. Έστω οι πραγματικοί αριθμοί α , β και η συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x)=x^4-\alpha x+\beta$ η οποία έχει ελάχιστο το f(2).

α) Να δείξετε ότι α=32 **(μον.5)**

β) Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο A(1,f(1)) διέρχεται από την αρχή των αξόνων τότε :

1. Να αποδειχθεί ότι β =3 **(μον.5)**

2. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=-48$ δεν έχει πραγματική λύση. **(μον.5)**

3. Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:R\to R$ με g(1)=1 , για την οποία ισχύει $f'(x)\cdot g(x)+(f(x)+48)\cdot g'(x)=0 \quad x\in R$ **(μον.5)**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f , g:(0,+\infty)\to R$ με f(1)=g(1)=0 και $f'(x)=-e^{g(x)}$, $g'(x)=-e^{f(x)}$ για κάθε x>0 .Να αποδείξετε ότι :

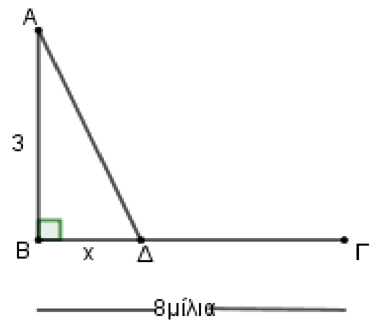
α) οι f και g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες. **(μον.4)**

β) $f=g$ **(μον.6)**

γ) η συνάρτηση $h(x)=e^{-f(x)}-x$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$. **(μον.4)**

δ) $f(x)=-\ln x, x>0$ **(μον.4)**

Δ2.Ένας ψαράς βρίσκεται με τη βάρκα του στη θέση Α και το πλησιέστερο σημείο Β της ακτής απέχει 3 ναυτικά μίλια. Στη θέση Γ και σε απόσταση 8 ναυτικών μιλίων(ν.μ.) από το Β, βρίσκεται η ιχθυόσκαλα όπου θέλει να φτάσει για να πουλήσει τα ψάρια του. Αν η βάρκα κινείται με ταχύτητα 4 ν.μ./h και ο ψαράς πεζός κινείται με ταχύτητα 5 ν.μ./h, να βρεθεί η τιμή του x για την οποία ο ψαράς χρειάζεται τον λιγότερο χρόνο για να φτάσει στην ιχθυόσκαλα.



Πόση είναι η συνολική διαδρομή τότε; **(μον.7)**

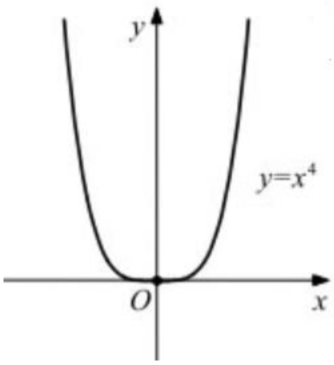
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α:

Α1.α. Σχ. βιβλίο σελ. 142
β. Σχ. βιβλίο σελ. 142

Α2.α. Ψ



β. Έχουμε την $f(x)=x^4, x\in\mathbb{R}$. Επειδή η $f'(x)=4x^3, x\in\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η $f(x)=x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Εντούτοις, η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο $\mathbb{R}$, αφού $f''(0)=0$.

Α3. Σχ. βιβλίο σελ. 76

Α4. α. Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β:

Β1. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$ ορίζεται στο $A=\mathbb{R}-\{1\}$ και είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σ' αυτό ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Η παράγωγος της f είναι:

$$f'(x)=\left(\frac{e^x}{x-1}\right)'=\frac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2}=\frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}, x\neq 1.$$

Για το πρόσημο και τις ρίζες της f' έχουμε:

$$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}\geq 0 \underset{(x-1)^2>0}{\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}} x-2\geq 0\Leftrightarrow x\geq 2 .$$

Ο πίνακας προσήμων της f' είναι:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
f'	$-$	‖ $-$	0 $+$	
f	↘	‖ ↘	↗	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty,1)$ και $(1,2]$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$. Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=2$ το $f(2)=e^2$.

Β2. Η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων με:

$$f''(x)=\left(\frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}\right)'=\frac{\left[e^x(x-2)+e^x\right](x-1)^2-2e^x(x-2)(x-1)}{(x-1)^4}=$$

$$\frac{e^x(x-1)^3-2e^x(x-2)(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{e^x(x-1)\left[(x-1)^2-2(x-2)\right]}{(x-1)^4}=$$

$$\frac{e^x\left(x^2-2x+1-2x+4\right)}{(x-1)^3}=\frac{e^x\left(x^2-4x+5\right)}{(x-1)^3},x\neq 1.$$

Για τις ρίζες και το πρόσημο της f'' έχουμε:

$$f''(x)\geq 0\Leftrightarrow\frac{e^x\left(x^2-4x+5\right)}{(x-1)^3}\geq 0\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}\frac{\left(x^2-4x+5\right)}{(x-1)^3}\geq 0\ \textbf{(1)}$$

Το τριώνυμο x^2-4x+5 έχει Δ=−4<0 και α=1>0 άρα $x^2-4x+5>0$. Τότε από τη σχέση **(1)** έχουμε: $f''(x)>0\Leftrightarrow(x-1)^3>0\Leftrightarrow x>1$. Ο πίνακας προσήμων της f'' είναι:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	$-$	‖ $+$	
f	$\cap$	‖ $\cup$	

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty,1)$ και κυρτή στο $(1,+\infty)$ και δεν παρουσιάζει σημείο καμπής.

Β3. Για τις ασύμπτωτες της f έχουμε:

*<u>Κατακόρυφες</u>:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{e^x}{x-1} = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{e^x}{x-1} = +\infty$$

Δηλαδή η **x=1** είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

*<u>Οριζόντιες και πλάγιες</u>:

Στο $+\infty$:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2 - x} \underset{L-H}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} \underset{L-H}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

Δηλαδή δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$.

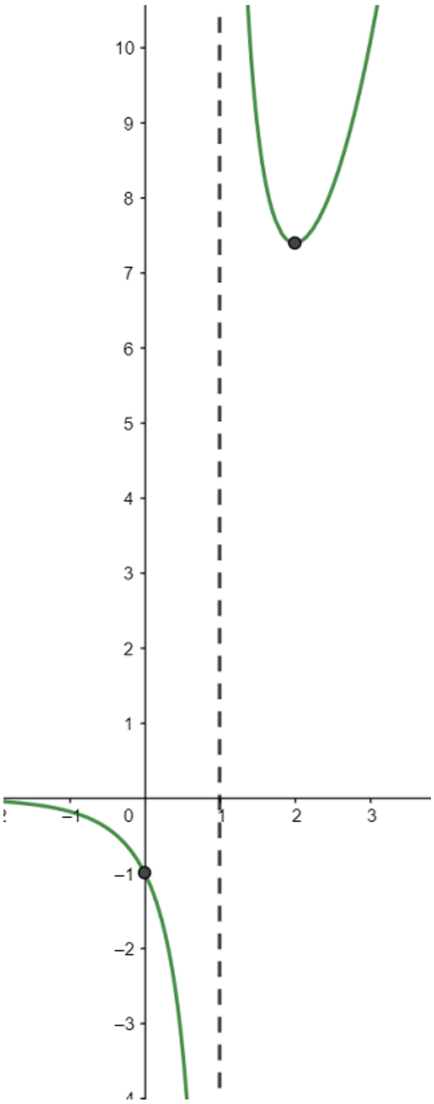
Στο $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x-1} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x-1}\cdot e^x\right) = 0\cdot 0 = 0,$$ δηλαδή η

y=0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Β4. Για τη χάραξη της γραφικής παράστασης της f συνοψίζουμε τα συμπεράσματα από τα παραπάνω ερωτήματα. Επίσης,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x-1} \underset{L-H}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$ Για τα σημεία τομής με τους άξονες έχουμε ότι η C_f δεν τέμνει τον $x'x$ εφόσον $f(x)\neq 0$, ενώ τέμνει τον $y'y$ στο $(0, f(0))$ δηλαδή στο $(0,-1)$. Οπότε:



ΘΕΜΑ Γ

Γ1.Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x)=x+e^{x-1}$.Η πρώτη εξίσωση γράφεται $f(x)=f(y)$ **(1).** Η f είναι γνησίως αύξουσα γιατί έχει παράγωγο $f'(x)=1+e^{x-1}>0$ άρα και 1-1.Η (1) λοιπόν δίνει $x=y$.

Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος γίνεται:

$x^2+x^2+x^2=12 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=-2$ ή x=2.

Οι λύσεις του συστήματος είναι: $(x,y)=(-2,-2)$ ή $(x,y)=(2,2)$.

Γ2.α)Αφού η f έχει ελάχιστο το f(2), σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat θα είναι $f'(2)=0$.Είναι $f'(x)=4x^3-\alpha$ άρα $4\cdot 2^3-\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=32$.

β)1.Είναι $f(x)=x^4-32x+\beta$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1)$ δηλ. $y+31-\beta=-28(x-1)$ και επειδή διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα ισχύει:

$0+31-\beta=-28(0-1)\Leftrightarrow \beta=3$.

2.Είναι $f(x)\geq f(2)\Rightarrow f(x)\geq -45>-48$ άρα η εξίσωση $f(x)=-48$ είναι αδύνατη.

3.Είναι $f'(x)\cdot g(x)+(f(x)+48)\cdot g'(x)=0$ άρα

$(f(x)+48)'\cdot g(x)+(f(x)+48)\cdot g'(x)=0\Leftrightarrow$

$[(f(x)+48)\cdot g(x)]'=0\Leftrightarrow (f(x)+48)\cdot g(x)=c$ **(1).**

Είναι $g(1)=1\overset{(1)}{\Rightarrow}(f(1)+48)\cdot g(1)=c\Leftrightarrow c=20$ και από την (1)

εχουμε $g(x)=\dfrac{20}{f(x)+48}\Rightarrow g(x)=\dfrac{20}{x^4-32x+51}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.α)Οι f' και g' είναι παραγωγίσιμες ως σύνθεση παραγωγίσιμων αρα οι f και g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες.

β)Εχουμε: $\left.\begin{array}{l} f'(x)=-e^{g(x)}\ (1) \\ g'(x)=-e^{f(x)}\ (2)\end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} f''(x)=-g'(x)\cdot e^{g(x)}=f'(x)\cdot g'(x) \\ g''(x)=-f'(x)\cdot e^{f(x)}=f'(x)\cdot g'(x)\end{array}$

Άρα $f''(x)=g''(x)\Leftrightarrow (f'(x))'=(g'(x))'\Leftrightarrow f'(x)=g'(x)+c$.

Από (1) και (2) είναι $f'(1)=-1,\ g'(1)=-1$ άρα c=0 οπότε

$f'(x)=g'(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)+k \underset{k=0}{\overset{f(1)=g(1)=0}{\Longleftrightarrow}} f(x)=g(x)$.

γ)Η $h(x)=e^{-f(x)}-x$ έχει $h'(x)=-f'(x)\cdot e^{-f(x)}-1=-e^{-f(x)}\cdot[-e^{g(x)}]-1=$

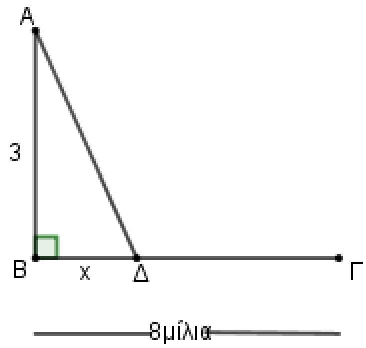
$=e^{g(x)}\cdot e^{-f(x)}-1=e^{g(x)-f(x)}-1\overset{(\beta)}{=}e^0-1=0$ άρα $h(x)=\alpha,\ \alpha\in R$.

δ)Αφού $h(x)=\alpha\Leftrightarrow h(1)=\alpha\Leftrightarrow e^0-1=\alpha\Leftrightarrow \alpha=0$ άρα $h(x)=0$

οπότε $e^{-f(x)}-x=0\Leftrightarrow e^{-f(x)}=x\Leftrightarrow \ln(e^{-f(x)})=\ln x\Leftrightarrow -f(x)=\ln x$

άρα $f(x)=-\ln x,\ x>0$.

Β. Έστω ΑΔ η διαδρομή της βάρκας και ΔΓ η διαδρομή που θα κινηθεί ο ψαράς πεζός. Είναι $ΑΔ=\sqrt{9+x^2}$ και ο αντίστοιχος χρόνος $\frac{\sqrt{9+x^2}}{4}$ και $(ΔΓ)=8-x$ με αντίστοιχο χρόνο $\frac{8-x}{5}$.



Ο συνολικός χρόνος είναι :

$$t(x)=\frac{8-x}{5}+\frac{\sqrt{9+x^2}}{4}, x\in[0,8].$$

Είναι :

$$t'(x)=\frac{1}{5}(8-x)'+\frac{1}{4}\left(\sqrt{9+x^2}\right)'=-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{9+x^2}}=\frac{-4\sqrt{9+x^2}+5x}{20\sqrt{9+x^2}}.$$

Αν $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow -4\sqrt{9+x^2}+5x\geq 0\Leftrightarrow 4\sqrt{9+x^2}\leq 5x$ άρα $16\cdot\left(9+x^2\right)\leq 25x^2\Leftrightarrow x^2\geq 16$ άρα $x\geq 4$.

Ο πίνακας προσήμου για την t' είναι:

x	0	4		8
t'	$-$	0	$+$	
t	↘	ελ	↗	

Η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στο x=4.
Η συνολική διαδρομή, ώστε να φτάσει ο ψαράς στην ιχθυόσκαλα συντομότερα είναι $(ΑΔ)+(ΔΓ)=\sqrt{9+16}+(8-4)=9$ν.μ.