ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 178

Υλη: Μέχρι κανόνες παραγώγισης

6-10-18

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

ΘΕΜΑ Α

Α1.α) Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της Α; **(μον.4)**

β) Πότε μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$. **(μον.4)**

γ) Να βρείτε , όπου ορίζεται την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x}$. **(μον.9)**

Α2. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις προτάσεις :

1. Αν η f είναι συνεχής στο x_o, τότε $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$. **Σ Λ**

2.Αν η f είναι συνεχής στο $\Delta=(\alpha,\beta)$, $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to\beta} f(x)=-\infty$, τότε η f έχει σύνολο τιμών το f(Δ)=R. **Σ Λ**

3. Αν η f είναι συνεχής στο $\Delta=[\alpha,\beta]$, τότε ο αριθμός $\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της . **Σ Λ**

4. Αν f(x) και g(x) συναρτήσεις ορισμένες σ' ένα σύνολο Α και παραγωγίσιμες σ'αυτό με f(x)>0 τότε $\left[f(x)^{g(x)}\right]'=\left[e^{g(x)\cdot\ln f(x)}\right]'=e^{g(x)\cdot\ln f(x)}\cdot\left[g(x)\cdot\ln f(x)\right]'$. **Σ Λ**

5. Αν μια συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη σ'ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της , τότε δεν είναι συνεχής σ'αυτό. **Σ Λ**

6. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^{x+1}+3}{2^x+1}=3$. **Σ Λ**

7. Αν f(x)>0 κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$. **Σ Λ**

8. Αν για τη συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει $f^2(x)=1$ για κάθε $x\in R$, τότε η f είναι συνεχής στο R . **Σ Λ**

(μον.8)

ΘΕΜΑ Β

Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[0,\pi]$ και για κάθε $x\in[0,\pi]$ ισχύει : $1+2\sqrt{\eta\mu x}\le f(x)\le 2+\eta\mu x$ **(1)**.

Β1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=\dfrac{\pi}{2}$. **(μον.8)**

Β2. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(x)-3}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$. **(μον.9)**

Β3. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{|3-f(x)|-x\cdot f(x)-3}{f(x)-3}$. **(μον.8)**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+2x-10$.

α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Να βρεθεί η τιμή $f^{-1}(-10)$.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x)=f(x)$.
Τι παριστάνουν οι λύσεις της ;

δ) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}\left(\dfrac{3x+1}{x-1}\right)\le 2$. **(μον.20)**

Γ2. Έστω η f συνεχής στο R με $f(3)=5$ και οι αριθμοί 2 και 6 δύο διαδοχικές της ρίζες Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5\cdot f(4)+(f(4)-6)x^2+3}{x^4-3f(4)\cdot x^2+2}.$$ **(μον.5)**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Να βρείτε, όπου ορίζεται , την παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases} x^3 &, \quad x<2 \\ x^4 &, \quad x\ge 2\end{cases}.$$ **(μον.8)**

Δ2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}(\alpha^2-8)\cdot x^3 &, x<1\\ \alpha x+1-\alpha &, x\ge 1\end{cases}$.

α) Να βρεθεί ο $\alpha\in R$,ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$. **(μον.9)**

β) Για την τιμή του α του α) ερωτήματος , εξετάστε αν η f αντιστρέφεται .Αν ναι να σχεδιάσετε την $C_{f^{-1}}$. **(μον.8)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1. Θωρεία.

Α2. 1Σ, 2Σ, 3Σ, 4Σ, 5Λ, 6Σ, 7Λ, 8Λ.

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1. Είναι: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+2\sqrt{\eta\mu x})=3$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(2+\eta\mu x)=3$ και σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=3$. Επίσης $f(\frac{\pi}{2})=3$.

Αρα η f είναι συνεχής στο $\frac{\pi}{2}$.

Β2. Απ' την (1) έχουμε: $2\sqrt{\eta\mu x}-2\le f(x)-3\le \eta\mu x-1 \Rightarrow$

$\frac{2\sqrt{\eta\mu x}-2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\le\frac{f(x)-3}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\le\frac{\eta\mu x-1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ κοντά στο $\frac{\pi}{2}$.

Είναι: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sqrt{\eta\mu x}-2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2(\sqrt{\eta\mu x}-1)}{(1-\eta\mu x)(1+\eta\mu x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2(\sqrt{\eta\mu x}-1)}{-(\sqrt{\eta\mu x}-1)(\sqrt{\eta\mu x}+1)(1+\eta\mu x)}=-\frac{1}{2}$$

και $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x-1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x-1}{-(1-\eta\mu^2 x)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x-1}{-(1-\eta\mu x)(1+\eta\mu x)}=-\frac{1}{2}$.

Απ' το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-3}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=-\frac{1}{2}$.

Β3. Απ' την (1)

έχουμε: $2\sqrt{\eta\mu x}-2\le f(x)-3\le \eta\mu x-1\le 0$, άρα $3-f(x)\ge 0$ και

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{|3-f(x)|-xf(x)-3}{f(x)-3}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-f(x)+3-xf(x)-3}{f(x)-3}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-f(x)(x+1)}{f(x)-3}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{f(x)-3}\cdot(-f(x)\cdot(x+1)\right]=(-\infty)\cdot(-3)\cdot(\frac{\pi}{2}+1)=+\infty.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.α) Είναι $f'(x)=3x^2+2>0$, άρα $f\nearrow$ και επομένως και 1-1. Άρα αντιστρέφεται.

Είναι δε $A_{f^{-1}}=f(A)=(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))=(-\infty,+\infty)=R$.

β) Είναι $f(0)=-10\Leftrightarrow f^{-1}(f(0))=f^{-1}(-10)\Leftrightarrow f^{-1}(-10)=0$.

γ) $f^{-1}(x)=f(x)\overset{f^{-1}\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)=x\Leftrightarrow x^3+2x-10=x\Leftrightarrow$

$x^3+x-10=0\Leftrightarrow x=2$, μοναδική ρίζα γιατί η $g(x)=x^3+x-10$ είναι γνησίως αύξουσα.

δ) Αρχικά πρέπει $x\ne 1$.

Απ' την $f^{-1}\left(\frac{3x+1}{x-1}\right)\le 2\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(f^{-1}\left(\frac{3x+1}{x-1}\right)\right)\le f(2)=2$

$$\Leftrightarrow\frac{3x+1}{x-1}-2\le 0\Leftrightarrow\frac{3x+1-2x+2}{x-1}\le 0\Leftrightarrow\frac{x+3}{x-1}\le 0\Leftrightarrow$$

$(x-1)(x+3)\le 0\Leftrightarrow -3\le x\le 1$. Άρα $-3\le x<1$.

Γ2. Επειδή οι 2 και 6 είναι διαδοχικές ρίζες και f(3)=5>0 και f συνεχής, είναι και f(4)>0. Έτσι το ζητούμενο όριο ισούται με το:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(4)\cdot x^5}{x^4}=\lim_{x\to+\infty}(f(4)\cdot x)=f(4)\cdot(+\infty)=+\infty.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Επειδή $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x^3) = 8,$ και $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x^4) = 16$

η f δεν είναι συνεχής στο 2 άρα ούτε παραγωγίσιμη. Είναι λοιπόν:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, x < 2 \\ 4x^3, x > 2 \end{cases}.$$

Δ2. α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 θα είναι και συνεχής οπότε:

$\lim_{x\to 1^{-1}} f(x) = \lim_{x\to 1^{+1}} f(x) = f(1) \Rightarrow \alpha^2 - 8 = \alpha + 1 - \alpha \Leftrightarrow$

$\alpha = -3$ ή $\alpha = 3$.

●Για $\alpha = -3$ είναι f(x)=$\begin{cases} x^3, & x < 1 \\ -3x + 4, & x \geq 1 \end{cases}$ με

$f'_\alpha(1) = \lim_{x\to 1^-} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-}(x^2 + x + 1) = 3$ και

$f'_\delta(1) = \lim_{x\to 1^-} \dfrac{-3x + 4 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \dfrac{-3(x-1)}{x - 1} = -3$ οπότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

●Για $\alpha = 3$ είναι f(x)=$\begin{cases} x^3, & x < 1 \\ 3x - 2, & x \geq 1 \end{cases}$ με $f'_\alpha(1) = 3$ και

$f'_\delta(1) = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{3x - 2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{3(x-1)}{x - 1} = 3$.

Αρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

β) Για α=3 είναι f(x)=$\begin{cases} x^3, & x < 1 \\ 3x - 2, & x \geq 1 \end{cases}$, συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1 επομένως αντιστρέφεται.

Η C_f είναι γνωστής μορφής επομένως η $C_{f^{-1}}$ είναι η συμμετρική της ως προς την διχοτόμο $y = x$ της πρώτης γωνίας των αξόνων.