ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

177

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη:Ολη **18-5-2018**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}, \alpha \in R-Z$. Να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\alpha \cdot x^{\alpha-1}$. **(μον.7)**

Α2. Η $g(x)=x^{\frac{4}{3}}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. **(μον.3)**

Α3. Να κυκλώσετε το Σ ή το Λ στις προτάσεις:

1. Αν $\lim\limits_{x\to x_o}|f(x)|=\ell \in R$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι:
$\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=\ell$ ή $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=-\ell$. Σ Λ

2. Αν $f'(x)=(x-1)^2\cdot(x-2)$ για κάθε $x \in R$, τότε το $f(1)$ είναι τοπικό ακρότατο της f. Σ Λ

3. Αν $f'(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha \neq 0$ τότε η $f: R \to R$ μπορεί να να έχει ένα τοπικό ακρότατο. Σ Λ

4. Το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} \varepsilon\varphi x dx$ είναι καλά ορισμένο. Σ Λ

5. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει, δύο τουλάχιστον, ετερόσημες τιμές. Σ Λ

(μον.10)

Α4. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στην ερώτηση 3. **(μον.5)**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Δίνεται η $f(x)=\begin{cases} e^x\cdot \sigma\upsilon\nu x, & -\dfrac{\pi}{2}\le x<0 \\ \sqrt{1+\eta\mu 2x}, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}\end{cases}$.

Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται απ' την C_f, τον $x'x$ και τις $x=-\dfrac{\pi}{2}$, $x=\dfrac{\pi}{2}$. **(μον.7)**

Β2. Εστω συνάρτηση $g(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$. Να βρείτε την g αν η C_g τέμνει τον $y'y$ στο $A(0,3)$ και η g παρουσιάζει στο $x_o=1$ μοναδικό ακρότατο το 4, του οποίου να βρείτε το είδος. **(μον.6)**

Β3. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$. Αν η g δεν είναι σταθερή στο $[\alpha,\beta]$ και $g(x)\ge 0,\ \forall x\in[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]:\int_\alpha^\beta f(x)\cdot g(x)dx=f(\xi)\cdot\int_\alpha^\beta g(x)dx$. **(μον.6)**

Β4. Αν $g:R\to R,\ g(0)=5$ και $(x^2+1)\cdot g'(x)=(x-1)^2\cdot g(x)$ βρείτε την g. **(μον.6)**

ΘΕΜΑ Γ

Εστω η πολυωνυμική συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύουν: • $f(1)=1$ • $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)}=8$ • $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+x-3}{x^2}=0$

Γ1. Να βρείτε την f. **(μον.7)**

Γ2. Αν η f είναι η $f(x)=-x^3-x+3$ να δείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα και έχει αντίστροφη μία συνάρτηση $f^{-1}:R\to R$ η οποία είναι κι αυτή γνησίως φθίνουσα. **(μον.6)**

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>f^{-1}(x)$. **(μον.6)**

Γ4. Να δείξετε ότι ,αν $\alpha,\beta\in R$, η εξίσωση $f(x)\cdot(x^7+\alpha x^2+\beta x+1)=e^x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,2)$. **(μον.6)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ $A=[0,+\infty)$ και f(x)=$\frac{x+1}{x^2+x+1}$,

και έστω F μια αρχική της στο A με F(0)=0.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η F είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη. **(μον.5)**

Δ2. Να αποδείξετε ότι $F(x) \geq \ln(x+1)$, για κάθε $x \geq 0$. **(μον.5)**

Δ3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{\ln x}$. **(μον.5)**

Δ4. Για κάθε x>0 αποδείξτε ότι: $e^{\eta\mu x - x} < \frac{F(1+\eta\mu x)-F(\eta\mu x)}{F(1+x)-F(x)}$. **(μον.7)**

Δ5. Να αποδείξετε ότι: $\int_0^1 f(x)dx > \ln 2$. **(μον.3)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ