ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

176

Ον/μο:……………….. **Γ΄(Β) Λυκείου**

Ύλη:Συναρτήσεις **31-3-2018**

ΘΕΜΑ Α

Α1.Να αποδείξετε ότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την y=x. **(μον.6)**

Α2.Πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε απλώς αύξουσα στο πεδίο ορισμού της;. **(μον.4)**

Α3.Να κυκλώσετε το Σ ή το Λ στις προτάσεις:

1.Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)^{g(x)}$ είναι τα x για τα οποία ισχύει $f(x)>0$. Σ Λ

2.Η C_f της $f(x)=3x^2-4x+2$ βρίσκεται πάνω απ’ τον x΄x. Σ Λ

3.Αν μια συνάρτηση είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της τότε έχει το πολύ μία ρίζα. Σ Λ

4.Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε τα όποια κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται στην y=x. Σ Λ

5.Για τη σύνθεση δύο συναρτήσεων ισχύει: $f\circ g=g\circ f$. Σ Λ

(μον.10)

Α4.Αιτιολογήστε την απάντησή σας στην ερώτηση 3. **(μον.5)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}-\sqrt{x-2}$

Β1.Βρείτε το πεδίο ορισμού της. **(μον.4)**

Β2.Δείξτε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. **(μον.6)**

Β3.Δείξτε ότι έχει μέγιστο το $\frac{1}{2}$. **(μον.6)**

Β4.Πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $f(x)=-2018$; **(μον.4)**

Β5.Να συγκρίνετε τις ποσότητες $f(x^2+1)$ και $f(2x)$. **(μον.5)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x+x-1$ και $g(x)=\ln x$.

Γ1.Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους. **(μον.4)**

Γ2.Να βρείτε τη συνάρτηση $h=f\circ g$. **(μον.6)**

Γ3.Να μελετήσετε την h ως προς τη μονοτονία. **(μον.3)**

Γ4.Αν η h είναι γνησίως αύξουσα να λύσετε την ανίσωση $x+\ln x>1$. **(μον.6)**

Γ5.Να λύσετε την εξίσωση $x^2-x-2=\ln\frac{x+3}{x^2+1}$. **(μον.6)**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.Η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι γνησίως μονότονη, έχει πεδίο τιμών το R και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(– 1,2002) και Β(1,2004).

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. **(μον.5)**

2. Να λύσετε την ανίσωση: $f(f(x)-2001)<2004$. **(μον.4)**

3. Να λύσετε την εξίσωση: $f[2+f^{-1}(x^2+x+2000)]=2004$. **(μον.6)**

Δ2.Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R, τέτοια ώστε $(f(x))^3+e^{f(x)}=2x+1$ για κάθε x στο R.

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1. **(μον.6)**

2. Να λυθεί ως προς x η εξίσωση $f(9^{x^2+8x})=f(9^{22-x})$ **(μον.4)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις(Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

Α1, Α2 Θεωρία

Α3. 1Λ, 2Σ, 3Σ, 4Σ, 5Λ

Α4.Εστω έχει τουλάχιστον δύο ρίζες $x_1 \neq x_2$.Τότε είναι $f(x_1)=f(x_2)=0$, άτοπο αφού η f είναι 1-1.

ΘΕΜΑ Β

Β1.Πρέπει $\left.\begin{array}{r} x \neq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow x \geq 2$ δηλ. Α=$[2,+\infty)$.

Β2. Εστω $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \Rightarrow \sqrt{x_1 - 2} < \sqrt{x_2 - 2} \Rightarrow$ $-\sqrt{x_1-2} > -\sqrt{x_2-2}$ **(1)**

Επίσης $x_1 < x_2 \Rightarrow \dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2}$ (2).

Από (1)+(2)$\Rightarrow \dfrac{1}{x_1} - \sqrt{x_1-2} > \dfrac{1}{x_2} - \sqrt{x_2-2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Η f λοιπόν είναι γνησίως αύξουσα.

Β3.Είναι: $x \geq 2 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{2} \\ -\sqrt{x-2} \leq 0 \end{array}\right| \overset{(+)}{\Rightarrow} \dfrac{1}{x} - \sqrt{x-2} \leq \dfrac{1}{2} \Rightarrow f(x) \leq \dfrac{1}{2}$

με το = να ισχύει για $x=2$. Αρα maxf=$\dfrac{1}{2}$.

Β4.Το $-2018 \in f(A)$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα η εξίσωση $f(x)=-2018$ έχει μία ρίζα.

Β5.Είναι $x^2+1 \geq 2x \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x^2+1) \leq f(2x)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $A_f = R$ και $A_g = (0,+\infty)$

Γ2. Η $f \circ g$ έχει πεδίο ορισμού τα

$$\left.\begin{matrix} x \in A_g \\ g(x) \in A_f \end{matrix}\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix} x > 0 \\ \ln x \in R \end{matrix}\right| \Rightarrow x > 0 \text{ δηλ. } A_{f\circ g} = (0,+\infty).$$

Ο τύπος της είναι $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{\ln x} + \ln x - 1 = x + \ln x - 1$.

Γ3. Εστω $x_1, x_2 > 0$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Rightarrow \ln x_1 - 1 < \ln x_2 - 1$ (1)

Αφού $x_1 < x_2$ (2), με πρόσθεση των (1) και (2) έχουμε:

$h(x_1) < h(x_2)$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα.

Γ4. Εχουμε: $x + \ln x > 1 \Leftrightarrow x + \ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow h(x) > h(1) \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} x > 1$.

Γ5. Είναι: $x^2 - x - 2 = \ln\dfrac{x+3}{x^2+1} \overset{x>-3}{\Leftrightarrow} x^2 - x - 2 = \ln(x+3) - \ln(x^2+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 - x - 3 = \ln(x+3) - \ln(x^2+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2+1) + \ln(x^2+1) = (x+3) + \ln(x+3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2+1) + \ln(x^2+1) - 1 = (x+3) + \ln(x+3) - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h(x^2+1) = h(x+3) \overset{h1-1}{\Leftrightarrow} x^2 + 1 = x + 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -1, x = 2$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

1. Αφού η f είναι γνησίως μονότονη και $f(-1) = 2002$, $f(1) = 2004$

δηλ. $f(-1) < f(1)$, θα είναι γνησίως αύξουσα.

2. $f(f(x) - 2001) < f(1) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) - 2001 < 1 \Leftrightarrow f(x) < 2002 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) < f(-1) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x < -1$

3. $f[2+f^{-1}(x^2+x+2000)]=f(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}2+f^{-1}(x^2+x+2000)=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f^{-1}(x^2+x+2000)=-1\Leftrightarrow f^{-1}(x^2+x+2000)=f^{-1}(2002)\Leftrightarrow$

$\overset{1-1}{\Leftrightarrow} x^2+x+2000=2002\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow x=-2, x=1.$

Δ2.

1.Εστω:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \left.\begin{array}{c} f^3(x_1)=f^3(x_2)\\ e^{f(x_1)}=e^{f(x_2)}\end{array}\right| \overset{(+)}{\Rightarrow} f^3(x_1)+e^{f(x_1)}=f^3(x_2)+e^{f(x_2)}\Rightarrow$$

$2x_1+1=2x_2+1\Rightarrow x_1=x_2$. Αρα η f είναι 1-1.

2. $f(9^{x^2+8x})=f(9^{22-x})\overset{1-1}{\Leftrightarrow}9^{x^2+8x}=9^{22-x}\Leftrightarrow x^2+8x=22-x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+9x-22=0\Leftrightarrow x=-11, x=2$.