ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

175

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη:Ολη **31-3-2018**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Εστω δύο συναρτήσεις f,g ορισμένες σε διάστημα Δ. Αν

•οι f, g είναι συνεχείς στο Δ

• $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$

να ισχύει $f(x) = g(x) + c$. **(μον.7)**

Α2. Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία της πρότασης του Α1. **(μον.3)**

Α3. Να δώσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος

για μια συνεχή συνάρτηση f, στο [α,β]. **(μον.5)**

Α4. Να κυκλώσετε το Σ ή το Λ στις προτάσεις:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^4 - x^2} = 0$ Σ Λ

2. Αν $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = u_o$ και $\lim\limits_{u \to u_o} g(u) = \ell$ τότε

$\lim\limits_{x \to x_o} g(f(x)) = \lim\limits_{u \to u_o} g(u) = \ell$. Σ Λ

3. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα τότε, τα όποια

κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$,βρίσκονται στην $y = x$. Σ Λ

4. Η σύνθεση $g \circ f$ των f και g ορίζεται αν το σύνολο τιμών

της f έχει κοινά στοιχεία με το πεδίο ορισμού της g. Σ Λ

5. Αν f και g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο R και $f(x) \le g(x)$

τότε και $f'(x) \le g'(x)$. Σ Λ

(μον.5)

Α5. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στην 3. **(μον.5)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Β1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. **(μον.6)**

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x^4+3x^2)=f(2x^3+1)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,0)$ και μία τουλάχιστον στο $(0,1)$. **(μον8)**

Β3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in R$, με $x_1 \neq x_2$ ισχύει:

$$x_1 \cdot f(x_1)+x_2 \cdot f(x_2) > x_1 \cdot f(x_2)+x_2 \cdot f(x_1)\ .$$ **(μον.5)**

Β4. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$I=\int_1^2 \frac{f'(x)}{x}dx-\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}dx\,.$$ **(μον.6)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to R$, με $f(x)=3-\dfrac{x}{\ln^2 x}$.

Γ1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία,τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. **(μον.7)**

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς δύο ρίζες. **(μον.5)**

Θεωρούμε, επιπλέον, τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{x}{\ln x}, x>1$.

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες της C_g οι οποίες διέρχονται από το σημείο M(0,3). **(μον.5)**

Γ4. Αν G μια παράγουσα της g στο $(1,+\infty)$, τότε να αποδείξετε ότι:

1. $\dfrac{x}{\ln x} < G(x+1)-G(x) < \dfrac{x+1}{\ln(x+1)}, \forall x > e$. **(μον.4)**

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{G(x+1)-G(x)}{x}=0$. **(μον.4)**

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

1. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{\eta\mu h}=f(1)$ **2.** $f'(0)<f''(x)\le f'(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_o=1$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων. **(μον.4)**

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο R. **(μον.4)**

Δ3. Αν επιπλέον για την f ισχύει: $f(x)+3\int_0^1 f(x)dx=x^2+5$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε να αποδείξετε ότι $f(x)=x^2+1$. **(μον.4)**

Δ4. Για τη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $g'(x)\cdot f(x)=g(x)\cdot(f(x)-f'(x))$ και $g(0)=1$.

1. Να αποδείξετε ότι $g(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$ και ότι η g είναι γνησίως αύξουσα. **(μον.4)**

2. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $\int_0^2 (x-1)\cdot g(x)dx>0$. **(μον.5)**

3. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται απ' την γραφική παράσταση της $h(x)=\dfrac{x\cdot e^x}{f(x)+2x}$, τον x΄x, τον y΄y και την x=1. **(μον.4)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις(Υποδείξεις)

ΘΕΜΑ Α

Α1, Α2, Α3 Θεωρία

Α4. 1Λ, 2Λ, 3Σ, 4Σ, 5Λ

Α5…. $\left.\begin{matrix} f(x)=y \\ x=f(y)\end{matrix}\right| \Rightarrow f(x)+\overset{(+)}{x}=f(y)+y \xRightarrow{h(x)=f(x)+x} h(x)=h(y) \xRightarrow[1-1]{h\uparrow} x=y$ …

ΘΕΜΑ Β

Β1.Είναι $f'(x)=...=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}>0, \forall x\in R,$ άρα f γν. αύξουσα.

Β2. $f(x^4+3x^2)=f(2x^3+1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x^4+3x^2=2x^3+1 \Leftrightarrow x^4+3x^2-2x^3-1=0$

και Θ.Bolzano στα $[-1,0]$, $[0,1]$ για την $g(x)=x^4-2x^3+3x^2-1$…

Β3.Αφού η f είναι γν. αύξουσα θα ισχύει:

$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0, x_1\neq x_2 \Leftrightarrow (x_2-x_1)\cdot(f(x_2)-f(x_1))>0...$

Β4…. $I=\int_1^2\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'dx=\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]_1^2=...$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.Είναι $f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{\ln^3 x}$, με ρίζα $x=e^2$ και $f(A)=\left(-\infty,\dfrac{12-e^2}{4}\right]$.

x	1	A_1	e^2	A_2	$+\infty$
f'	‖	+	0	−	
f	‖	$-\infty$ ↗		↘ $+\infty$	

$$M=\frac{12-e^2}{4}>0$$

Γ2. Μία ρίζα στο $A_1 = (1, e^2)$ και μία στο $A_2 = (e^2, +\infty)$.

Γ3. Είναι ε: $y - g(x_o) = g'(x_o)(x - x_o) \xRightarrow{M(0,3)\in(\varepsilon)} \ldots f(x_o) = 0$ που έχει δύο ρίζες από το (Γ2).

Γ4. 1. Θ.Μ.Τ. για την G στο [x,x+1]…
2. Κριτήριο παρεμβολής στην (1)…

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Από $(1) \Rightarrow \ldots f'(1) = f(1)$.
Απ' την ε: $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow 0 - f(1) = f'(1)(0-1) \Rightarrow f(1) = f'(1)$ που ισχύει.

Δ2. Από Θ.Μ.Τ. στην $f' \Rightarrow \exists \xi \in (0,1): f''(\xi) = f'(1) - f'(0)$ και η $(2) \Rightarrow$
$f'(0) < f'(1) - f'(0) \le f'(1) \Rightarrow f'(0) \ge 0$ άρα $f''(x) > f'(0) \ge 0$ επομένως η f κυρτή.

Δ3. Θέτω $3\int_0^1 f(x)dx = c$ οπότε $f(x) + c = x^2 + 5 \Rightarrow f(x) = x^2 + 5 - c$ και
άρα $3\int_0^1 (x^2 + 5 - c)dx = c \Rightarrow \ldots c = 4$ και $\ldots f(x) = x^2 + 1$.

Δ4. 1. Από $g'(x) \cdot f(x) = g(x) \cdot (f(x) - f'(x)) \Leftrightarrow \ldots (f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g(x)$
άρα $f(x) \cdot g(x) = c \cdot e^x \Rightarrow \ldots g(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$.

2. Είναι $\int_0^2 (x-1)g(x)dx = \int_0^1 (x-1)g(x)dx + \int_1^2 (x-1)g(x)dx$

•Αν $0 \le x \le 1 \xRightarrow{g\uparrow} g(x) \le g(1) \xRightarrow{x-1<0} (x-1)g(x) \ge (x-1)g(1) \Rightarrow$
$\int_0^1 (x-1)g(x)dx > -\dfrac{g(1)}{2}$ (1)

•Αν $1 \le x \le 2 \Rightarrow \ldots \int_1^2 (x-1)g(x)dx > \dfrac{g(1)}{2}$ (2)

Από πρόσθεση των (1) και (2) είναι $\int_0^2 (x-1) \cdot g(x)dx > 0$

3. Είναι: $h(x)=\dfrac{x\cdot e^x}{f(x)+2x}=\dfrac{x\cdot e^x}{x^2+2x+1}=\dfrac{x\cdot e^x}{(x+1)^2}$ και το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με το

$$\int_0^1 |h(x)|dx=\int_0^1\left|\frac{x\cdot e^x}{(x+1)^2}\right|dx=\int_0^1\frac{x\cdot e^x}{(x+1)^2}dx=\left[\frac{e^x}{x+1}\right]_0^1=\frac{e}{2}-1$$