ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

174

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη:Συναρτήσεις-Παράγωγοι **10-2-2018**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Εστω η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x,\ x\in R_1=R-\{x/\sigma\upsilon\nu x=0\}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$(\varepsilon\varphi x)'=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x},\ x\in R_1$. **(μον.5)**

Α2. Διατυπώστε το Θεώρημα Rolle του διαφορικού λογισμού και ερμηνεύστε το γεωμετρικά. **(μον.5)**

Α3. Διατυπώστε το Θεώρημα Μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και ερμηνεύστε το γεωμετρικά. **(μον.5)**

Α4. Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Δίνεται η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$ η οποία ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle. Τότε και η συνάρτηση $g(x)=(f\circ f)(x)$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα [α,β]»

Να αιτιολογήσετε το σωστό ή το λάθος του ισχυρισμού αυτού. **(μον.5)**

Α5. Να χαρακτηρίσετε με (Σ) ή (Λ) τις προτάσεις:

1. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y=f(x)$ και η f είναι μία συνάρτηση παραγωγίσιμη ως προς x τότε αν το y μειώνεται ως προς x με ρυθμό α , εννοούμε ότι $f'(x)=-\alpha$ με α>0. Σ Λ

2. Αν $x=S(t)$ η συνάρτηση θέσης ενός κινητού, $\upsilon(t_0)=S'(t_0)$ η στιγμιαία ταχύτητα τη χρονική στιγμή t_0 και κοντά στο t_0 ισχύει $\dfrac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}>0$, τότε $\upsilon(t_0)\geq 0$, όταν το κινητό κινείται προς τα δεξιά. Σ Λ

3. Εστω η συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0)=0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0. Σ Λ

4. Εστω η συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω ή είναι κυρτή στο Δ ,αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ. Σ Λ

5. Αν $f(x)=\alpha^x$, $\alpha>0$ τότε ισχύει $(\alpha^x)'=x\cdot\alpha^{x-1}$ Σ Λ

(μον.5)

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1. Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=x^3+x$. Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της h^{-1} . **(μον.4)**

Β2. Θεωρούμε επιπλέον τις $f,g:R\to R$ για τις οποίες ισχύουν

- $f'(x^3+x)=x, \forall x\in R$
- $g(x^3+x)=\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2, \forall x\in R$
- $f(0)=0$

Να δείξετε ότι $f=g$. **(μον.5)**

Β3. Δίνεται η $\varphi(x)=2\cdot e^{x-\alpha}-(x-\alpha)^2-2,\ \alpha>0$.
Να αποδείξετε ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα. **(μον.4)**

Β4. Να δείξετε ότι η $t(x)=x-\ln(x^2+1)$ είναι γνησίως αύξουσα. **(μον.4)**

Β5. Να λύσετε την ανίσωση $\varphi(x)>\ln(\varphi^2(x)+1)$. **(μον.4)**

Β6. Αν $x\in[\alpha,2\alpha]$ να δείξετε ότι $\varphi(x)\geq 2(x-\alpha)$. **(μον.4)**

ΘΕΜΑ Γ

Η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν οι σχέσεις:

1. $f(2)=2$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu 3x}=3$ **3.** $f''(x)\neq 0,\ \forall x\in(0,2)$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$. **(μον.3)**

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f'(0)=9$. **(μον.4)**

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(0,f(0))$ **(μον.3)**

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο (0,2). **(μον.5)**

Γ5. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2): f(\xi)=2-\xi$. **(μον.5)**

Γ6. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,2): f'(x_1)\cdot f'(x_2)=1$. **(μον.5)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν:

● Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=1$

● $f(xy)=f(x)\cdot\dfrac{1}{y}+f(y)\cdot\dfrac{1}{x}$ για κάθε x>0 και y>0

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=-\dfrac{f(x)}{x}+\dfrac{1}{x^2},\forall x>0$. **(μον.4)**

Δ2. Να βρείτε τον τύπο της f. **(μον.3)**

Δ3. Αν $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ τότε:

1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. **(μον.5)**

2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f, το σύνολο τιμών της f και να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3=e^x, x>0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες. **(μον.5)**

3. Να αποδείξετε ότι $\alpha^\beta>\beta^\alpha$ για κάθε $e\le\alpha<\beta$ και στη συνέχεια ότι ισχύει $(\ln x)^{x-1}>(x-1)^{\ln x}$ για κάθε $x\ge e^e$. **(μον.4)**

4. Να δείξετε ότι $2f(4x)+f(x)>3f(3x)$ για κάθε $x\ge e\sqrt{e}$. **(μον.4)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ