ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

173

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη:Συναρτήσεις-Παράγωγοι **9-12-2017**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση που ορίζεται στο Α είναι παραγωγίσιμη στο $x_o \in A$ τότε είναι και συνεχής στο $x_o \in A$. **(μον.8)**

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής. **(μον.3)**

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία. **(μον.2)**

Α4. Να κυκλώσετε το (Σ) ή το (Λ) στις προτάσεις:

1. Αν $f(x)\cdot g(x)=0$ για κάθε $x\in R$ τότε μπορεί και καμία συνάρτηση να μην είναι η μηδενική. Σ Λ

2. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της τότε ισχύει η ισοδυναμία: $f(\alpha)<f(\beta)\Leftrightarrow \alpha<\beta$. Σ Λ

3. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-|x|}=0$. Σ Λ

4. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+7}{x^8-x^5+2}$ ορίζεται κοντά στο $x_o=1$. Σ Λ

5. Εστω η συνάρτηση $f:A\to R$ η οποία είναι αντιστρέψιμη και συνεχής. Τότε η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}:f(A)\to R$ είναι πάντοτε συνεχής. Σ Λ

(μον.5)

Α5. Αν $f(x)=\begin{cases} x, & \text{αν } x\in(0,1) \\ x-1, & \text{αν } x\in[2,3) \end{cases}$ και $f^{-1}(x)=\begin{cases} x, & \text{αν } x\in(0,1) \\ x+1, & \text{αν } x\in[1,2) \end{cases}$

ελέγξτε την ορθότητα της απάντησής σας στην 5 του Α4. **(μον.3)**

Α6. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στις 1 και 3 του Α4. **(μον.4)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3\ln x+x+3$

B1. Να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της **(μον.7)**

B2. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\frac{1}{e^{x+3}}=x^3,\ x>0$. **(μον.6)**

B3. Θεωρούμε επιπλέον, τη γνησίως μονότονη συνάρτηση $g:R\to R$ με $g(R)=(0,+\infty)$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(1,5) και Β(2,1).
Να λύσετε την ανίσωση $(f\circ g)(x)<4$. **(μον.7)**

B4. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\cdot ημ\frac{2}{f(x)}\right)$. **(μον.5)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$, με $A=(0,+\infty)$, για την οποία ισχύει:

$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{xy-1}{xy}$, για κάθε $x,y\in A$, με $x\neq y$, **(1)**.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. **(μον.5)**

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη, με παράγωγο
$f'(x)=1-\frac{1}{x^2},\ x\in A$. **(μον.5)**

Γ3. Να βρείτε την f(x), αν είναι γνωστό ότι f(1)=2. **(μον.5)**

Γ4. Αν $f(x)=x+\frac{1}{x}$, να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να λύσετε την εξίσωση $f(x^2-x+1)+f(x^2+x+1)=4$. **(μον.6)**

Γ5. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ημx}{f'(x)+f(x^2)}$. **(μον.4)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $f(R)=R$ και $f^3(x)+f(x)=x$, για κάθε $x\in R$, **(1).**

Δ1.Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται και ότι $f(x^3+x)=x$, για κάθε $x\in R$. **(μον.6)**

Δ2.Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=\ln(x\cdot f(x))$. **(μον.6)**

Δ3.Να δείξετε ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. **(μον.4)**

Δ4.Να λύσετε την εξίσωση $f(|\eta\mu x|)+f'(|x|)=f(|x|)+f'(|\eta\mu x|)$ **(μον.4)**

Δ5.Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}(f'(x))^{\frac{1}{x}}=1$. **(μον.5)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

Α1, Α2, Α3 Θεωρία

Α4.

1.Σωστό. Για παράδειγμα οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}0, & \text{αν } x\le 1\\ x^2+1, & \text{αν } x>1\end{cases}$

και $g(x)=\begin{cases}x+2, & \text{αν } x\le 1\\ 0, & \text{αν } x>1\end{cases}$ έχουν γινόμενο $f(x)\cdot g(x)=0$

χωρίς καμία να είναι μηδέν.

2.Σωστό.

•Αν $\alpha<\beta \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(\alpha)<f(\beta)$ από τον ορισμό

•Εστω τώρα $f\uparrow$ και f(α)<f(β)

Αν $\alpha>\beta \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(\alpha)>f(\beta)$, άτοπο.

Αν $\alpha=\beta \Rightarrow f(\alpha)=f(\beta)$,άτοπο.

Αρα $f(\alpha)<f(\beta) \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} \alpha<\beta$.

3.Λάθος. Για την $f(x)=\sqrt{x^2-|x|}$ πρέπει

$x^2-|x|\ge 0 \Leftrightarrow |x|^2-|x|\ge 0 \Leftrightarrow |x|\cdot(|x|-1)\ge 0$ (1).Επειδή $|x|\ge 0$,$\forall x\in R$

η (1) δίνει $x=0$ ή $|x|\ge 1 \Leftrightarrow x=0$ ή $(x\le -1$ ή $x\ge 1)$.Η συνάρτηση f

λοιπόν έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,-1]\cup\{0\}\cup[1,+\infty)$ και δεν έχει

νόημα το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, αφού στο πεδίο ορισμού της f δεν περιέχονται τιμές

κοντά στο 0.

4.Σωστό. Είναι $\lim\limits_{x\to 1}(x^8-x^5+2)=2>0$ άρα και $x^8-x^5+2>0$ κοντά

στο 1,επομένως η f ορίζεται κοντά στο 1.

5.Λάθος.Πρέπει το Α να είναι διάστημα.(Αιτιολόγηση στο Α5)

Α5.Η f είναι συνεχής στα (0,1) και [2,3) ως πολυωνυμική.Αρα συνεχής στο πεδίο ορισμού της. Για την f^{-1} είναι και $\lim\limits_{x\to 1^+} f^{-1}(x)=2$ και

$\lim\limits_{x\to 1^-} f^{-1}(x)=1$,άρα η f^{-1} δεν είναι συνεχής στο $A_{f^{-1}}$.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=(0,+\infty)$ και παράγωγο

$f'(x)=\frac{3}{x}+1>0, \forall x\in A,$ άρα είναι $\uparrow$.

Η f είναι συνεχής στο Α και γνησίως αύξουσα. Εχει λοιπόν σύνολο τιμών το $f(A)=(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x))=(-\infty,+\infty)$ δηλ. f(A)=R.

Β2. Η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{1}{e^{x+3}}=x^3 \Leftrightarrow x^3\cdot e^{x+3}=1 \Leftrightarrow \ln(x^3\cdot e^{x+3})=\ln 1 \Leftrightarrow \ln x^3+\ln e^{x+3}=0 \Leftrightarrow$$

$3\ln x+x+3=0 \Leftrightarrow f(x)=0$.

Το $0\in f(A)$, άρα η f(x)=0 , λόγω και της μονοτονίας της f, έχει ακριβώς μία ρίζα.

Β3. Είναι $g(1)=5$, g(2)=1 δηλ. 1<2 και g(1)>g(2) με την g να είναι γνησίως μονότονη. Αρα η g είναι γνησίως φθίνουσα.

Η $f\circ g$ ορίζεται για τα $\left.\begin{array}{c} x\in A_g \\ g(x)\in A_f \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x\in R \\ g(x)>0 \end{array}\right| \Rightarrow x\in R$ δηλ. $A_{f\circ g}=R$.

Είναι: $(f\circ g)(x)<4 \Leftrightarrow f(g(x))<f(1) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x)<1 \Leftrightarrow g(x)<g(2) \overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow}$ $x>2$.

Β4. Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\cdot \eta\mu\frac{2}{f(x)}\right) \overset{f(x)=h}{=\!=\!=} \lim\limits_{h\to+\infty}\left(h\cdot\eta\mu\frac{2}{h}\right) \overset{\frac{2}{h}=y}{=\!=\!=} \lim\limits_{y\to 0^+}\left(\frac{2}{y}\cdot\eta\mu y\right)=$

$=\lim\limits_{y\to 0^+}\left(2\cdot\frac{hmy}{y}\right)=2\cdot 1=2$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.Εχουμε ότι: $\lambda=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=\dfrac{xy-1}{xy}=1-\dfrac{1}{xy}$

•Αν $\left.\begin{array}{l}0<x\le 1\\ 0<y\le 1\end{array}\right|\Rightarrow 0<xy\le 1\Rightarrow \dfrac{1}{xy}\ge 1\Rightarrow \lambda\le 0\Rightarrow$ $f\downarrow$ στο $(0,1]$.

•Αν $\left.\begin{array}{l}x\ge 1\\ y\ge 1\end{array}\right|\Rightarrow xy\ge 1\Rightarrow \dfrac{1}{xy}\le 1\Rightarrow \lambda\ge 0\Rightarrow$ $f\uparrow$ στο $[1,+\infty)$.

Γ2.Είναι: $\lim\limits_{x\to y}\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=\lim\limits_{x\to y}\dfrac{xy-1}{xy}=\lim\limits_{x\to y}(1-\dfrac{1}{xy})=1-\dfrac{1}{y^2}$ για κάθε y>0.

Αρα $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2},\ x>0$.

Γ3.Αφού $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$ θα είναι $f(x)=x+\dfrac{1}{x}+c,\ c\in R$. Επειδή f(1)=2

είναι $1+\dfrac{1}{1}+c=2\Leftrightarrow c=0$ οπότε $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$.

Γ4.Η f είναι συνεχής στο $A=(0,+\infty)$ και $\downarrow$ στο $A_1=(0,1]$

και $\uparrow$ στο $A_2=[1,+\infty)$.Εχει σύνολο τιμών λοιπόν $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)$

$=[f(1),\lim\limits_{x\to 0^+}f(x))\cup[f(1),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))=[2,+\infty)\cup[2,+\infty)$

άρα $f(A)=[2,+\infty)$.Η f επομένωςς έχει ελάχιστο το 2 για x=1.

Απ' την εξίσωση $f(x^2-x+1)+f(x^2+x+1)=4\Leftrightarrow$

$f(x^2-x+1)=2$ και $f(x^2+x+1)=2\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-x+1=1$ και $x^2+x+1=1\Leftrightarrow x^2-x=0$ και $x^2+x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\cdot(x-1)=0$ και $x\cdot(x+1)=0\Leftrightarrow$ $x=0$.

Γ5.Είναι $\dfrac{\eta\mu x}{f'(x)+f(x^2)}=\dfrac{\eta\mu x}{1-\dfrac{1}{x^2}+x^2+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{\eta\mu x}{x^2+1}$.

Επειδή $-1\le\eta\mu x\le 1\Leftrightarrow -\dfrac{1}{x^2+1}\le\dfrac{\eta\mu x}{x^2+1}\le\dfrac{1}{x^2+1}$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2+1}=0$.

Σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x^2+1}=0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Απ' την (1) , $f^3(x)+f(x)=x \Rightarrow 3f^2(x)\cdot f'(x)+f'(x)=1 \Leftrightarrow$

$f'(x)\cdot[3f^2(x)+1]=1 \Leftrightarrow$ $f'(x)=\dfrac{1}{3f^2(x)+1}>0$ **(2)** άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** επομένως και 1-1 στο R άρα αντιστρέφεται με $A_{f^{-1}}=f(R)=R$.

Η (1), αν όπου $x \to f^{-1}(x)$, γίνεται:

$\left(f(f^{-1}(x))\right)^3+f(f^{-1}(x))=f^{-1}(x) \Leftrightarrow x^3+x=f^{-1}(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x^3+x)=f(f^{-1}(x)) \Leftrightarrow f(x^3+x)=x,\ \forall x\in R$.

Δ2. Η f είναι γνησίως αύξουσα (από Δ1).

Για την g πρέπει $x\cdot f(x)>0$.

Απ' την $f(x^3+x)=x \overset{x=0}{\Rightarrow} f(0)=0$.

•Αν $x>0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x)>f(0)=0 \overset{\cdot x>0}{\Rightarrow} x\cdot f(x)>0$

•Αν $x<0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x)<f(0)=0 \overset{\cdot x<0}{\Rightarrow} x\cdot f(x)>0$

Αρα $x\cdot f(x)>0$ για κάθε $x\in R^*$ επομένως η g έχει πεδίο ορισμού το $A_g=R^*$.

Δ3. Απ'την (2),του (Δ1) ερωτήματος, είναι $f'(x)=\dfrac{1}{3f^2(x)+1}$ και επομένως η f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f''(x)=-\dfrac{(3f^2(x)+1)'}{(3f^2(x)+1)^2}=-\dfrac{6f(x)\cdot f'(x)}{(3f^2(x)+1)^2}$

Στο Δ2 έχουμε:

• $x<0$, f(x)<0 και αφού f′(x)>0 είναι f″(x)>0 στο $(-\infty,0]$ άρα $f'\uparrow$ στο $(-\infty,0]$.

• $x>0$, f(x)>0 και αφού f′(x)>0 είναι f″(x)<0 στο $[0,+\infty)$ άρα $f'\downarrow$ στο $[0,+\infty)$.

Δ4. Η εξίσωση γράφεται: $f(|\eta\mu x|) - f'(|\eta\mu x|) = f(|x|) - f'(|x|) \xLeftrightarrow[h\ \uparrow \sigma\tau o[0,+\infty)]{h(x)=f(x)-f'(x)}$

$\Leftrightarrow h(|\eta\mu x|) = h(|x|) \xLeftrightarrow{h\, 1-1} |\eta\mu x| = |x| \Leftrightarrow$ $x=0$.

Δ5. Εχουμε: $f'(x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln f'(x)} = e^{\frac{\ln f'(x)}{x}}$ **(1).**

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln f'(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln f'(x) - \ln f'(0)}{x-0} \overset{K(x)=\ln f'(x)}{=\!=\!=\!=\!=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{K(x)-K(0)}{x-0} =$

$= K'(0) = 0$ γιατί

$$K'(x) = \left(\ln f'(x)\right)' = \frac{f''(x)}{f'(x)} \overset{x=0}{\Rightarrow} K'(0) = \frac{f''(0)}{f'(0)} \underset{(\Delta 1)}{\overset{(\Delta 3)}{=\!=}} -\frac{\dfrac{-6f(0)\cdot f'(0)}{(3f^2(0)+1)^2}}{\dfrac{1}{3f^2(0)+1}} =$$

$= -\dfrac{6f(0)\cdot f'(0)}{\left(3f^2(0)+1\right)^2} = 0$ γιατί f(0)=0.

Από την (1) έχουμε ότι: $\lim\limits_{x\to 0}\left(f'(x)\right)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$.