ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

172

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη:Συναρτήσεις-Όρια στο x_o **7-10-2017**

ΘΕΜΑ Α

Α1.Πότε δύο συναρτήσεις λέγονται ίσες; **(μον.5)**

Α2. Μπορεί δύο συναρτήσεις με ίδιο πεδίο ορισμού και διαφορετικό τύπο να είναι ίσες; Δώστε ένα παράδειγμα. **(μον.2)**

Α3.Εστω συνάρτηση f που ορίζεται στο Α και είναι 1-1.Να δείξετε ότι:

$\bullet\, f^{-1}(f(x)) = x,\ x \in A$ και $\bullet\, f(f^{-1}(y)) = y,\ y \in f(A)$ **(μον.8)**

Α4.Να χαρακτηρίσετε με (Σ) ή (Λ) τις προτάσεις:

1.Αν $f(x) = \ln x$ και $g(x)=e^{-x}$ τότε

α) $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x},\ x \in R^*$ Σ Λ

β) $(f \circ g)(x) = -x,\ x \in R$ Σ Λ

2.Αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_o και υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ τότε

$\lim\limits_{x \to x_o} f(x)>0.$ Σ Λ

3. Αν $0 \le f(x) \le 1$ κοντά στο μηδέν, τότε και $\lim\limits_{x \to x_o} (x^4 \cdot f(x)) = 0$ Σ Λ

4.Αν $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \ell_1$ και $\lim\limits_{x \to x_o} g(x) = \ell_2$ τότε και

$\lim\limits_{x \to x_o} (f(x) \cdot g(x)) = \ell_1 \cdot \ell_2$ Σ

Λ

5.Αν για κάθε x κοντά στο 2 ισχύει $h(x) \le f(x) \le g(x)$,

$\lim\limits_{x \to 2} h(x) = -6,\ \lim\limits_{x \to 2} g(x) = 8$ τότε $-6 \le \lim\limits_{x \to 2} f(x) \le 8$ Σ Λ

(μον.10)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: R \to R$ της οποίας η C_f διέρχεται απ' τα σημεία Α(1,3) και Β(0,2).

1. Βρείτε το είδος της μονοτονίας της f. **(μον.3)**

2. Λύστε την ανίσωση $f(f(x^2)-3) > 2$ **(μον.4)**

Β2.

1. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την $f(x) = e^{-x} - x$ **(μον.6)**

2. Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2-1} + x^2 < 2$ **(μον.6)**

3. Αν α<β να δείξετε ότι $\dfrac{e^{\beta} - e^{\alpha}}{\alpha - \beta} < e^{\alpha+\beta}$ **(μον.6)**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^3-x}$ **2.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ **3.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x^2-x}$ **(μον.9)**

Γ2. Αν ισχύει $f^2(x) - 2f(x) + \sigma\upsilon\nu^2 x \le 0$, για κάθε $x \in R$ να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ **(μον.7)**

Γ3. Αν $f(x) = \dfrac{\alpha \cdot |x+2| + \beta \cdot |x-4| - 2}{x^2 - 5x + 6}$ και $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 10$ βρείτε τα α και β. **(μον.9)**

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f : A \to R$ με A=[0,+∞) για την οποία ισχύουν:

● $f(x) > 2,\ \forall x \in A$

● $f^2(x) + 3 = 4f(x) + x^2,\ \forall x \in A$

Δ1.Να δείξετε ότι $f(x) = 2 + \sqrt{x^2 + 1}$ **(μον.5)**

Δ2.Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη. **(μον.5)**

Δ3.Βρείτε την f^{-1} **(μον.5)**

Δ4.Να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται πάνω απ’ την y=x **(μον.5)**

Δ5.Αν M σημείο της C_f , M' συμμετρικό του M ως προς την y=x και (MM΄)=$\sqrt{18}$, να βρείτε τα σημεία M και M΄. **(μον.5)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

Α1, Α2, Α3 Θεωρία

Α4. 1αΛ, 1βΣ, 2Λ, 3Λ, 4Λ, 5Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

1. Αφού 1>0 και $f(1)=3>f(0)=2$ και επί πλέον η f είναι γνησίως μονότονη , θα είναι γνησίως αύξουσα.

2. Είναι:

$$f(f(x^2)-3)>2 \Leftrightarrow f(f(x^2)-3)>f(0) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x^2)-3>0 \Leftrightarrow f(x^2)>f(1) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}$$
$$x^2>1 \Leftrightarrow x<-1 \text{ ή } x>1.$$

Β2.

1. Η f έχει πεδίο ορισμού το A=R και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με $f'(x)=-e^{-x}-1<0$, άρα είναι γνησίως φθίνουσα.

2. Η ανίσωση $e^{x^2-1}+x^2<2$, ισοδύναμα γράφεται:

$$e^{x^2-1}+x^2-1<1 \Leftrightarrow e^{-(1-x^2)}-(1-x^2)<1 \Leftrightarrow f(1-x^2)<f(0) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}$$
$$1-x^2>0 \overset{\varepsilon\tau\varepsilon\rho}{\Leftrightarrow} -1<x<1.$$

3. Θα δείξουμε ότι: $\dfrac{e^\beta-e^\alpha}{\alpha-\beta}<e^{\alpha+\beta} \Leftrightarrow$

$$\frac{e^\beta-e^\alpha}{\alpha-\beta}<e^\alpha\cdot e^\alpha \overset{\cdot(\alpha-\beta<0)}{\Longleftrightarrow} \frac{e^\beta-e^\alpha}{e^\alpha\cdot e^\alpha}>\alpha-\beta \Leftrightarrow \frac{1}{e^\alpha}-\frac{1}{e^\beta}>\alpha-\beta$$

$$\Leftrightarrow e^{-\alpha}-e^{-\beta}>\alpha-\beta \Leftrightarrow e^{-\alpha}-\alpha<e^{-\beta}-\beta \Leftrightarrow f(\alpha)>f(\beta) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}$$

$\alpha<\beta$ που ισχύει.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1.

1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = R - \{-1,0,1\}$ και

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^3-x} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x(x+1)} = \frac{3}{2}.$$

2. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = [-3,1)\cup(1,+\infty)$ και

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)\cdot(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)\cdot(\sqrt{x+3}+2)} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\cdot(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4}.$$

3. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = R - \{0,1\}$ και

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x^2-x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{x-1}\right) = 1\cdot(-1) = -1.$$

Γ2. Η σχέση $f^2(x) - 2f(x) + \sigma\upsilon\nu^2 x \le 0$, ισοδύναμα, γράφεται:

$f^2(x) - 2f(x) + 1 \le 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow (f(x)-1)^2 \le \eta\mu^2 x \Leftrightarrow$

$0 \le (f(x)-1)^2 \le \eta\mu^2 x$.

Επειδή $\lim_{x\to 0}(\eta\mu^2 x) = \lim_{x\to 0}(0) = 0$, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x\to 0}(f(x)-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}(f(x)-1) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

Γ3. Κοντά στο 2 είναι $x+2>0$ και $x-4<0$ οπότε ο τύπος της f γράφεται

$$f(x) = \frac{\alpha(x+2)+\beta(-x+4)-2}{x^2-5x+6} = \frac{(\alpha-\beta)x+2\alpha+4\beta-2}{x^2-5x+6} \text{ άρα}$$

$f(x)\cdot(x^2-5x+6) = (\alpha-\beta)x + 2\alpha + 4\beta - 2$ και βάζοντας όρια έχουμε:

$\lim_{x\to 2}[f(x)\cdot(x^2-5x+6)] = \lim_{x\to 2}[(\alpha-\beta)x+2\alpha+4\beta-2] \Leftrightarrow$

$0 = 4\alpha + 2\beta - 2 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta = 1$ **(1)**.

Εχουμε τώρα απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$ και:

$$\lim_{x\to 2} f(x) \underset{LH}{\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}} \lim_{x\to 2}\frac{[(\alpha-\beta)x+2\alpha+4\beta-2]'}{(x^2-5x+6)} = \lim_{x\to 2}\frac{\alpha-\beta}{2x-5} = \frac{\alpha-\beta}{-1} \text{ άρα}$$

$\alpha-\beta=-10$ **(2).**

Απ' το σύστημα των (1) και (2) προκύπτει ότι $\alpha=-3$ και $\beta=7$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Απ' την ισότητα $f^2(x)+3=4f(x)+x^2$ **(1)** έχουμε:

$f^2(x)-4f(x)+4=x^2+1 \Leftrightarrow (f(x)-2)^2=x^2+1 \Leftrightarrow$

$|f(x)-2|=\sqrt{x^2+1} \overset{f(x)>2}{\Longleftrightarrow} f(x)-2=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=2+\sqrt{x^2+1}$.

Δ2. Είναι: $f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\geq 0,\ \forall x\in A$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1 επομένως αντιστρέφεται.

Δ3. Επειδή η f είναι συνεχής ισχύει ότι $A_{f^{-1}}=f(A)=[f(0),\lim\limits_{x\to+\infty})=[3,+\infty)$

Απ' την εξίσωση $f(x)=y \Leftrightarrow 2+\sqrt{x^2+1}=y \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=y-2 \Leftrightarrow$

$x^2+1=(y-2)^2 \Leftrightarrow x^2=(y-2)^2-1 \Leftrightarrow x=\sqrt{y^2-4y+3}$.

(η $x=-\sqrt{y^2-4y+3}\notin A$ και απορρίπτεται).

Αρα $f^{-1}(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$.

Δ4. Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x)>x \Leftrightarrow 2+\sqrt{x^2+1}>x,$ που ισχύει γιατί $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|=x,\forall x\in A$.

Δ5. Αν $M(\alpha,\beta)\in C_f$ τότε το M' είναι το $M'(\beta,\alpha)$.

Αφού $(MM')=\sqrt{18}\Rightarrow\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{18}\Leftrightarrow\sqrt{2}|\beta-\alpha|=3\sqrt{2}$

άρα $|\beta-\alpha|=3\overset{\beta>\alpha}{\Leftrightarrow}$ $\beta-\alpha=3$ **(1)**.

Αφού το $M(\alpha,\beta)\in C_f$ είναι

$\beta=2+\sqrt{\alpha^2+1}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\alpha+3=2+\sqrt{\alpha^2+1}\Leftrightarrow\alpha+1=\sqrt{\alpha^2+1}\overset{\alpha>-1}{\Leftrightarrow}$

$\alpha^2+2\alpha+1=\alpha^2+1\Leftrightarrow 2\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=0$ οπότε β=3.

Αρα $M(0,3)$ και $M'(3,0)$.