ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

169

Ον/μο:……………….. **Γ΄ Λυκείου**

Ύλη:Ολη **12-3-2017**

ΘΕΜΑ Α

Α1.Εστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c, c\in R$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c, c\in R$. **(μον.7)**

Α2.Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής. **(μον.4)**

Α3.Πότε μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ λέγεται κυρτή και πότε κοίλη στο Δ; **(μον.4)**

Α4.Να χαρακτηρίσετε με (Σ) ή (Λ) τις προτάσεις:

1.Αν μία συνάρτηση $f:A\to R$ είναι 1-1,για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει:
$f^{-1}(f(x))=x, x\in A$ και $f(f^{-1}(y))=y, y\in f(A)$. Σ Λ

2.Αν $\lim_{x\to x_o} f(x)<0$, τότε f(x)<0 κοντά στο x_o. Σ Λ

3.Εστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α,β]. Αν ισχύει ότι $f(x)\geq 0,\ \forall x\in[\alpha,\beta]$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$. Σ Λ

4.Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο [α,β] και f(β) μέγιστη τιμή της συνάρτησης, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f'(\beta)=0$. Σ Λ

5.Αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της f(x), η εξίσωση f(x)=y έχει λύση ως προς x, τότε η f είναι 1-1. Σ Λ

(μον.10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

Β1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα τη f. **(μον.4)**

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς την καμπυλότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της. **(μον.4)**

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. **(μον.4)**

Β4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. **(μον.4)**

Β5. Να γράψετε τον τύπο:

1. της συμμετρικής της f ως προς τον y΄y.
2. της συμμετρικής της f ως προς τον x΄x.
3. της συμμετρικής της f ως προς το Ο(0,0). **(μον.3)**

Β6. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται απ' τις γραφικές παραστάσεις των f , της συμμετρικής της ως προς τον x΄x,την x=1 και τον y΄y. **(μον.6)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύουν: • f(0)=1 • $f(x)-f'(x)=x^3-3x^2+x-1,\ \forall x\in R$.

Γ1. Να βρείτε τον τύπο της f. **(μον.5)**

Γ2. Αν $f(x)=e^x+x^3+x$ να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}. **(μον.4)**

Γ3. Να αποδείξετε ότι:

1. υπάρχει ακριβώς ένας $\alpha\in(-1,0)$ τέτοιος, ώστε $f^{-1}(0)=\alpha$. **(μον.4)**

2. η εξίσωση $\dfrac{f(x+\alpha)}{x-1}-\dfrac{f(\alpha-e^x)}{x}=0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα (0,1). **(μον.5)**

Γ4. Αν α, β $\in[0,+\infty)$, με α<β, να δείξετε ότι:

$$\int_\alpha^{\alpha+1} f(x)dx-\int_\beta^{\beta+1} f(x)dx<f(\alpha)-f(\beta).$$ **(μον.7)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:
$\bullet f(0)=1$ $\bullet f(x)>0$ $\bullet f'(0)=0$ $\bullet f''(x)=2(f(x)+xf'(x)),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{x^2},\ x\in\mathbb{R}$. **(μον.5)**

Δ2.

1. Να αποδείξετε ότι η $g(x)=\dfrac{f(x)-1}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. **(μον.3)**

2. Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{f(x^3)-1}{f(x)-1}>x^2,\ x\in(0,+\infty)$. **(μον.3)**

Θεωρούμε στη συνέχεια μια παράγουσα F της f στο R.

Δ3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha>0$ ισχύει $\int_{-\alpha}^{\alpha} x\cdot F(F(x))dx>0$. **(μον.5)**

Δ4.

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $F(\varepsilon\varphi x)=F(1-x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$. **(μον.2)**

2. Να αποδείξετε ότι η F είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_F στο σημείο $M(0,F(0))$. **(μον.2)**

3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}(F(x))^{\frac{F(x)}{xf(x)}}$. **(μον.5)**

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

Α1, Α2, Α3 Θεωρία

Α4. 1Σ, 2Σ, 3Λ, 4Λ, 5Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f έχει πεδίο ορισμού το Α=R και παράγωγο:

$$f'(x)=\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)'=\frac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}>0.$$ Άρα είναι γνησίως αύξουσα στο R και δεν έχει ακρότατα.

Β2. Είναι: $$f''(x)=\left[\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right]'=\frac{e^x(e^x+1)^2-e^x\cdot 2(e^x+1)e^x}{(e^x+1)^4}=\frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}.$$

Αν $f''(x)\geq 0\Leftrightarrow 1-e^x\geq 0\Leftrightarrow e^x\leq 1\Leftrightarrow e^x\leq e^0\Leftrightarrow x\leq 0$.

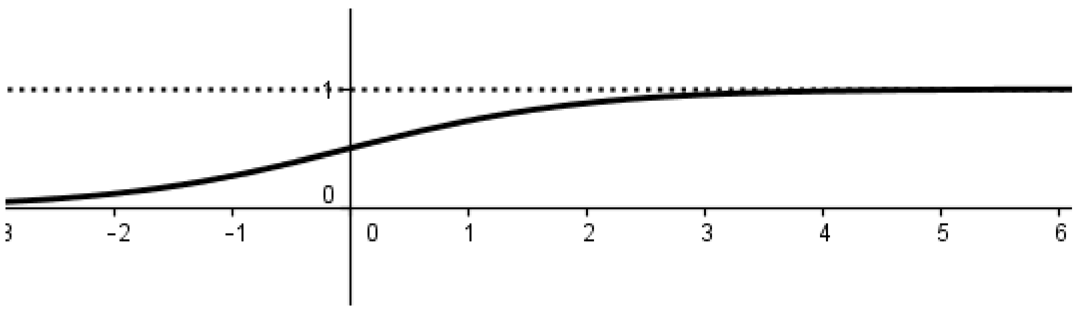
Αν $f''(x)\leq 0\Leftrightarrow 1-e^x\leq 0\Leftrightarrow e^x\geq 1\Leftrightarrow e^x\geq e^0\Leftrightarrow x\geq 0$.

Η f λοιπόν είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$ και έχει σημείο καμπής στη θέση $x_0=0$.

Β3. ●Η f είναι συνεχής στο R άρα δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{0}{0+1}=0$ άρα η y=0 (ο x΄x) είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{LH}{===}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$ άρα η y=1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Β4. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , σύμφωνα με τα παραπάνω είναι η του σχήματος



Β5.●Η συμμετρική της f ως προς τον y΄y έχει τύπο $g(x)=\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}=\dfrac{1}{e^{x}+1}$.

●Η συμμετρική της f ως προς τον x΄x έχει τύπο $h(x)=-f(x)=-\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}$.

●Η συμμετρική της f ως O(0,0) έχει τύπο $w(x)=-\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}=-\dfrac{1}{e^{x}+1}$.

Β6.Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E=2\int_0^1|f(x)|dx=2\int_0^1 f(x)dx=2\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=2[\ln(e^x+1)]_0^1=2\ln\frac{e+1}{2}.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.Εχουμε:

$$f(x)-f'(x)=x^3-3x^2+x-1\Leftrightarrow f(x)-x^3-x=f'(x)-3x^2-1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x)-x^3-x=(f(x)-x^3-x)'\Leftrightarrow f(x)-x^3-x=c\cdot e^x, c\in R \quad (1)$$

Αφού $f(0)=1\overset{(1)}{\Rightarrow}1=c\cdot 1\Rightarrow c=1$ οπότε $f(x)=e^x+x^3+x$.

Γ2.Είναι : $f'(x)=e^x+3x^2+1>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι

$A_{f^{-1}}=f(A)=(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))=(-\infty,+\infty)$. Αρα $A_{f^{-1}}=(-\infty,+\infty)$.

Γ3.

1.Η $f^{-1}(0)=\alpha\Leftrightarrow f(\alpha)=0$.

Η f είναι συνεχής στο R άρα και στο $[-1,0]$.

Εχει $f(0)=1>0$ και $f(-1)=e^{-1}-2<0$ δηλ. $f(0)\cdot f(-1)<0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένας $\alpha\in(-1,0):f(\alpha)=0$.Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα ,αυτό το α είναι μοναδικό.

Η εξίσωση $\frac{f(x+\alpha)}{x-1}-\frac{f(\alpha-e^x)}{x}=0$ $(x\neq 0,1)$ είναι ισοδύναμη με την $x\cdot f(x+\alpha)-(x-1)\cdot f(\alpha-e^x)=0$.

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x)=x\cdot f(x+\alpha)-(x-1)\cdot f(\alpha-e^x)$, $x\in R$.

•Η g είναι συνεχής στο [0,1] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

•$g(0)=f(\alpha-1)$ και $g(1)=f(\alpha+1)$

Εχουμε τώρα:

$$\alpha-1<\alpha<\alpha+1\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(\alpha-1)<f(\alpha)<f(\alpha+1)\Rightarrow f(\alpha-1)<0<f(\alpha+1)$$

οπότε $g(0)\cdot g(1)<0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένας $\xi\in(0,1)$ ώστε $g(\xi)=0$.

Γ4. Η ανίσωση, ισοδύναμα, γράφεται:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+1}f(x)dx-f(\alpha)<\int_{\beta}^{\beta+1}f(x)dx-f(\beta)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{F(\alpha+1)-F(\alpha)-f(\alpha)<F(\beta+1)-F(\beta)-f(\beta)}\ (1)$$, F αρχική της f.

Εστω $H(x)=F(x+1)-F(x)-f(x)$ οπότε $H'(x)=f(x+1)-f(x)-f'(x)$.

Για την f ,σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει τουλάχιστον ένας $k\in(x,x+1)$ ώστε $f'(k)=f(x+1)-f(x)$ και έτσι η H' γράφεται

$H'(x)=f'(k)-f'(x)>0$ γιατί $k>x$ και $f'\nearrow$ αφού

$f''(x)=e^x+6x>0$ $\forall x\geq 0$. Αρα η H(x) είναι $\nearrow$.

Η (1) λοιπόν γράφεται, ισοδύναμα, $H(\alpha)<H(\beta)\overset{H\uparrow}{\Leftrightarrow}\alpha<\beta$,που ισχύει.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.Εχουμε: $(f'(x))'=2(f(x)+xf'(x))\Leftrightarrow(f'(x))'=(2f(x)+2xf'(x))\Leftrightarrow$

$(f'(x))'=(2xf(x))'\Leftrightarrow\Leftrightarrow$ $f'(x)=2xf(x)+c$ **(1)**

Είναι $f'(0)=0\overset{(1)}{\Rightarrow}0=0+c\Rightarrow c=0$ άρα $f'(x)=2xf(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=2x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(\ln f(x))'=(x^2)'\Leftrightarrow \ln f(x)=x^2+k$ **(2)**

Είναι $f(0)=1\underset{x=0}{\overset{(2)}{\Rightarrow}}\ln 1=0^2+k\Leftrightarrow k=0$ άρα $\ln f(x)=x^2\Leftrightarrow f(x)=e^{x^2}$

Δ2.

1.Είναι: $g'(x)=\left(\dfrac{f(x)-1}{x}\right)'=\dfrac{f'(x)\cdot x-f(x)+1}{x^2}=\dfrac{2x^2\cdot e^{x^2}-e^{x^2}+1}{x^2}$ **(1)**

Θεωρούμε την

$h(x)=2x^2\cdot e^{x^2}-e^{x^2}+1$ οπότε $h'(x)=2xe^{x^2}+4x^3e^{x^2}>0,\forall x>0$ άρα

η h είναι $\uparrow \overset{x>0}{\Rightarrow} h(x)>h(0)=0$.

Απ' την (1) είναι $g'(x)>0$ άρα η g είναι ↗ στο $(0,+\infty)$.

2.Η προς λύση ανίσωση γράφεται:

$\dfrac{f(x^3)-1}{x^3}>\dfrac{f(x)-1}{x}\Leftrightarrow g(x^3)>g(x)\overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow}x^3>x\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x^2>1\Leftrightarrow x>1$.

Δ3.Εχουμε: $\int_{-\alpha}^{\alpha}x\cdot F(F(x))dx=\int_{-\alpha}^{0}x\cdot F(F(x))dx+\int_{0}^{\alpha}x\cdot F(F(x))dx$ **(1)**

Είναι: $F'(x)=f(x)=e^{x^2}>0$ άρα η F είναι ↗.

● Για $x\in[-\alpha,0]$ είναι $x\le 0\Rightarrow F(x)\le F(0)\Rightarrow F(F(x))\le F(F(0))\overset{\cdot x<0}{\Rightarrow}$

$x\cdot F(F(x))\ge xF(F(0))\Rightarrow\int_{-\alpha}^{0}xF(F(x))dx>\int_{-\alpha}^{0}xF(F(0))dx\Rightarrow$

$\int_{-\alpha}^{0}xF(F(x))dx>F(F(0))\int_{-\alpha}^{0}xdx\Rightarrow\int_{-\alpha}^{0}xF(F(x))dx>F(F(0))\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_{-\alpha}^{0}\Rightarrow$

$\int_{-\alpha}^{0}xF(F(x))dx>-\dfrac{\alpha^2}{2}F(F(0))$ **(2)**

● Για $x\in[0,\alpha]$ είναι $x\ge 0\Rightarrow F(x)\ge F(0)\Rightarrow F(F(x))\ge F(F(0))\overset{\cdot x>0}{\Rightarrow}$

$x\cdot F(F(x))\ge xF(F(0))\Rightarrow\int_{0}^{\alpha}xF(F(x))dx>\int_{0}^{\alpha}xF(F(0))dx\Rightarrow$

$\int_{0}^{\alpha}xF(F(x))dx>F(F(0))\int_{0}^{\alpha}xdx\Rightarrow\int_{0}^{\alpha}xF(F(x))dx>F(F(0))\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_{0}^{\alpha}\Rightarrow$

$\int_{0}^{\alpha}xF(F(x))dx>\dfrac{\alpha^2}{2}F(F(0))$ **(3)**

Με πρόσθεση των (2) και (3) κατά μέλη είναι $\int_{-\alpha}^{\alpha}xF(F(x))dx>0$.

Δ4.

1. Επειδή η F είναι $\nearrow$,είναι και 1-1 και η εξίσωση $F(εφx)=F(1-x)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow εφx=1-x \Leftrightarrow εφx+x-1=0$ **(1)**
Θεωρούμε τη συνάρτηση $w(x)=εφx+x-1$ η οποία στο $[0,1]$ είναι συνεχής και $w(0)=-1<0,\ w(1)=εφ1>0$.
Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένας τουλάχιστον
$ξ\in(0,1): w(ξ)=0$

2. Είναι $F'(x)=f(x)=e^{x^2}$, $F''(x)=2x\cdot e^{x^2}\geq 0$ στο $[0,+\infty)$
(το = ισχύει μόνο για x=0) οπότε η F είναι κυρτή σ' αυτό.
Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_F στο $M(0,F(0))$ είναι:
$y-F(0)=F'(0)(x-0)\Rightarrow y-F(0)=f(0)\cdot x\Rightarrow y=x+F(0)$.

3. Επειδή η F είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ θα είναι $F(x)\geq x+F(0)$
και επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+F(0))=+\infty$ είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$.

Είναι: $F(x)^{\frac{F(x)}{xf(x)}}=e^{\frac{F(x)}{xf(x)}\cdot\ln F(x)}=e^{\frac{F(x)\cdot\ln F(x)}{xf(x)}}$ **(2)**

$$\text{Εχουμε: } \lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)\cdot\ln F(x)}{xf(x)}\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{\underset{LH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)\cdot\ln F(x)+F(x)\cdot\dfrac{f(x)}{F(x)}}{f(x)+xf'(x)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}\cdot\ln F(x)+e^{x^2}}{e^{x^2}+x\cdot 2x\cdot e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln F(x)+1}{1+2x^2}\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{\underset{LH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{f(x)}{F(x)}}{4x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{4x\cdot F(x)}\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{\underset{LH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{4F(x)+4xf(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2xe^{x^2}}{4F(x)+4xe^{x^2}}\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{\underset{LH}{=}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x^2}+2x\cdot 2x\cdot e^{x^2}}{4e^{x^2}+4e^{x^2}+4x\cdot 2x\cdot e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+4x^2}{8+8x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{8x^2}=\frac{1}{2}.$$

Από την (2) προκύπτει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}(F(x))^{\frac{F(x)}{xf(x)}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.